Notas de Clase
Macroeconomía Avanzada

Universidad de los Andes
Facultad de Economía

José Ignacio López

2017-2

Introducción

Son muchos los libros introductorios de macroeconomía que presentan de una manera intuitiva y simple los conceptos y debates más importantes de la la macroeconomía moderna (algunos ejemplos son Abel et al. (2014), Lieberman and Hall (2008) y Mankiw (2014). No obstante, la formalización y precisión de muchas de esas discusiones, así como los avances más recientes ya sean metodológicos o conceptuales, no hacen parte de estos libros y están en muchos casos dispersos en publicaciones especializadas. Son poco de hecho los libros de referencia que pueden ser utilizados en una clase intermedia o avanzada de macroeconomía. Entre ellos están Romer (2002), Ljungqvist and Sargent (2004) y Woodford (2003). Estas notas, sin pretender ser suficientemente exhaustivas tanto en lo técnico como en la diversidad de temas, buscan presentar los temas macroeconómicos más relevantes de los últimos años con la rigurosidad necesaria para entender la literatura académica a un nivel intermedio/ avanzado. Adicionalmente, pretenden llenar el vacío de textos en español que exponen y explican los problemas conceptuales de la macroeconomía moderna.

Origines de la Macroeconomía Moderna

La macroeconomía, como sub-disciplina de la economía, tiene origen en la gran depresión de 1929 que se originó en los Estados Unidos y se expandió a la mayoría de países del mundo. Mucho se ha escrito sobre la gran depresión y sus causas continúan siendo un tema debatido en la academia, pero sin lugar a duda la gran depresión puso en el centro del debate económico la necesidad de medir y entender variables agregadas y discutir que tipo de políticas pueden evitar o mejorar los costos de las crisis económicas.[1]

El primer paso hacia una explicación de los fenómenos económicos a nivel agregado fue el desarrollo de las cuentas nacionales con el objetivo de medir el ingreso, la producción y el resto de variables macroeconómicas. En 1937 Simon Kuznets presenta una propuesta metodológica para construir por primera vez un sistema de cuentas nacionales y medir la producción en Estados Unidos. Este trabajo, que había comenzado desde 1931 cuando Wesley Clair Mitchell comisionó a Kuznets para que estudieras las estadísticas de variables agregagadas del *NBER* (*National Bureau of Economic Research*), dieron inicio a lo que progresivamente se convertiría en la metodología estándar de cuentas nacionales, hoy en día bajo la supervisión de la oficina de estadísticas de Naciones Unidas (*SNA*). En 1940, John Maynard Keynes publica su panfleto de *How to Pay for the War* donde propone la creación de un sistema de cuentas nacionales basados en el gasto de los diferentes agentes económicos, incluido el gasto del gobierno.

Keynes se convierte en el economista (macroeconomista) más famoso de su generación al presentar en varios de sus escritos una visión de los ciclos económicos donde los componentes de demanda, en particular la inversión privada y el gasto público, juegan un papel fundamental. Su obra más importante, la teoría general del empleo, el interés y el dinero (Keynes (1936)) es uno de los textos clásicos sobre el análisis de ciclos y variables agregadas y hasta el día de hoy existe debate sobre su contenido y alcance. La Teoría General recibió inmediata atención, en particular por una generación de economistas jóvenes que buscaban un marco teórico donde el libre mercado no llevara necesariamente a un equilibrio eficiente de la economía. Al año siguiente de la publicación de la teoría general, la asociación *Econometric Society* organizó una conferencia especial para discutir los alcances de la obra de Keynes. En dicha conferencia, Hicks (1937) presenta una síntesis, o una re-interpretación, del pensamiento de Keynes (el modelo IS-LM), que se convierte en el primer modelo de equilibrio general macroeconómico. La política del *New Deal* inspiradas en la ideas keynesianas y la recuperación económica de Estados Unidos, Europa y Japón después de la segunda guerra mundial, convierten las ideas keynesianas

[1] Friedman and Schwartz (1963) es una referencia obligada sobre la visión monetarista de la gran depresión, Bernanke (1995) señala el rol del pánico bancario. Más reciente Cole and Ohanian (2004) y Ohanian (2009) señalan las políticas Hebert Hoover y del *New Deal* como culpables de la gran depresión a través de distorsiones en el mercado laboral manifiestas en una rigidez salarial.

en el paradigma macroeconómico predominante.

En los años 50s y 60s la macroeconomía se confronta con el reto de estimar ecuaciones simultáneas de distintos componentes de demanda, para anticipar fluctuaciones del ciclo económico. El aumento de los precios del petróleo, el final del acuerdo de Bretton-Woods y el periodo de bajo crecimiento e inflación en los Estados Unidos (*staglation*) ponen en duda el modelo keynesiano y advierten sobre la fragilidad de modelos en los cuales los agentes puede cometer errores sistemáticos y no reaccionan frente a cambios en la política económica.

La flotación de los tipos de cambio de las monedas de los países desarrollados y la política de la Reserva Federal de los Estados Unidos reabren el debate sobre los efectos reales de la política monetaria. Un punto de inflexión en el dominio de los modelos keynesianos de la época, son los trabajos de Milton Friedman y Edmund Phelps. Friedman and Schwartz (1963) muestran que una política monetaria laxa conduce a tasas de inflación mayores usando evidencia histórica para los Estados Unidos. Dicha evidencia abre el debate sobre los efectos de la política monetaria en el corto y largo plazo, y la capacidad que tienen los hacedores de política de arbitrar entre desempleo e inflación (la curva de Phillips).

Esta discusión monetarista conduce al nacimiento de la macroeconomía moderna, donde el papel de las expectativas de los agentes, que antes no hacían parte de los modelos económicos, juega un paper fundamental. Aunque resulta arbitrario, se puede afirmar que la macroeconomía moderna comienza en la década de los 70s con Robert Lucas y otros economistas que critican el rol pasivo en los modelos keynesianos de las expectativas económicas del sector privado. Lucas (1972) introduce expectativas racionales en un modelo monetario y Lucas (1976) formaliza la crítica a los modelos en los cuales las expectativas de los agentes no responden a cambios en el sistema económico[2]. Con base en este énfasis, los trabajos de Kydland and Prescott (1982) y King, Plosser, and Rebelo (1988) retoman algunas de la ideas de Pigou sobre modelos de ciclos económicos basados en modelos donde los agentes económicos toman decisiones con base en expectativas racionales en un sistema de competencia perfecta. Estos dos artículos le dan comienzo a la agenda

[2] La critica de Lucas ya estaba presente en trabajos anteriores, como el mismo Lucas reconoce en su articulo, al hacer mencion a Knight (1921), Friedman et al. (1957) y Muth (1961)

de modelos de ciclos reales que se extiende hasta hoy con modificaciones en múltiples direcciones.

El modelo de ciclos reales, RBC por sus siglas en inglés (*Real Business Cycle*), se convierte en el modelo de referencia de la macroeconomía moderna, en parte por introducir un instrumental técnico que permite modelar decisiones de diferentes agentes, plantear un equilibrio económico y un método de solución a problemas estocásticos de alta complejidad. La literatura de los modelos de ciclos reales se consolida con los trabajos de Hansen (1985) y Rogerson (1988) que permiten modelar decisiones de trabajo en el margen extensivo y reconciliar algunos de los trabajos microeconómicos sobre la elasticidad de horas de trabajo frente a salarios y las fluctuaciones agregadas del mercado laboral. Stokey, Lucas, and Prescott (1989) se convierte en la referencia obligada para el planteamiento y solución de modelos estocásticos y recursivos.

Los modelos iniciales de ciclos reales no tenían ninguna fricción y contaban con agentes representativos, sin ninguna heterogeneidad, y estaban expuestos a solo un tipo de choque agregado: choques de productividad. En las últimas tres décadas, los modelos de ciclos reales han sido modificados en múltiples direcciones pero siguen siendo la base de los actuales *DSGE (Dynamic Stochastic General Equilibrium Model).*

Los *DSGE* son los modelos predominantes en la macroeconomía actual - aunque no ausentes de críticas. El ejemplo canónico de referencia actual de los DSGE es Smets and Wouters (2007) que es el modelo de equilibrio general preferido por los Bancos Centrales. Estos modelos DSGE permiten analizar los efectos y diseño de política monetaria gracias a la introducción de rigideces de precios que hacen que las tasas de interés nominal tengan un papel en las decisiones de consumo de los agentes. Esta literatura conocida como la familia neokeynesiana de modelos nace con el trabajo de Christiano et al. (1996) donde mediante una metodología de vectores auto-regresivos se evidencia el papel que tiene la política monetaria en los ciclos económicos. Inspirado por este hecho estilizado Goodfriend and King (1997), Clarida, Galí, and Gertler (1999) y Woodford (2003) desarrollan el modelo neokeynesiano y dan inicio a la discusión de optimalidad de la política monetaria en el contexto de fricciones a la fijación de precios y salarios.

Después de la última crisis financiera y económica en los Estados Unidos, los DSGE han reincorporado ideas de modelos con fricciones financieras donde el sistema financiero y la asignación de crédito juegan un papel en la economía. Los trabajos pioneros de Kiyotaki and Moore (1997) y Bernanke, Gertler, and Gilchrist (1999) donde fricciones financieras tienen un papel de amplificación de los choques de productividad, se convierten en referente en una nueva literatura que incorpora fricciones crediticias ya sea al modelo RBC o al modelo neokeynesiano. Esta literatura ha explorado recientemente el papel de los mercados de crédito no sólo como mecanismo de propagación de choques productivos, sino también al origen de las fluctuaciones económicas, es decir se ha dado al estudio de como cambios estocásticos en las condiciones generales de crédito generan fluctuaciones de las variables macroeconómicas más importantes (un ejemplo de esta literatura es el trabajo de Jermann and Quadrini (2012)).

Paralelo al desarrollo de los *DSGE* una rama importante de la literatura macroeconómica ha estudiado el efecto de fricciones en el mercado laboral. Las fricciones de búsqueda y encuentro, introducida por los trabajos pioneros de Diamond (1982), Mortensen (1982), Pissarides (1985) y Mortensen and Pissarides (1994), le permiten al modelo estándar hablar sobre variables como desempleo y vacantes laborales, que no están definidos en un modelo ausente de fricciones donde el mercado laboral siempre se vacía. Adicionalmente, estos trabajos dan comienzo a una larga literatura explorando el papel de los choques de productividad en los incentivos de creación de puestos de trabajo y en el estudio más detallado de las transiciones entre empleo y desempleo.

Otra agenda paralela a la del desarrollo de los modelos *DSGE* tiene que ver con el papel de la heterogeneidad de los agentes económicos en la dinámica de variables agregadas. El trabajo pionero de Aiyagari (1994), que describe el equilibrio económico de un modelo con agentes que están expuestos a choques idiosincráticos, abre la puerta al estudio de modelos con riesgo agregado y específico a cada agente. El trabajo de Krusell and Smith (1998) es un referente sobre las complejidad técnicas de estos modelos y los supuestos necesarios para encontrar un concepto de solución.

Otros trabajos han ampliado la frontera de la macroeconomía asumiendo fricciones de información que permiten introducir aprendizaje de los agentes economómicos al interior del modelo. En estos trabajos las fluctuaciones económicas están determinadas de manera importante por la cantidad de información y la capacidad de los agentes económicas de procesar y actualizar dicha información dada unas creencias sobre la estructura o las fuentes de incertidumbre de la economía. Finalmente, cabe mencionar los modelos con equilibrio múltiple donde las fluctuaciones económicas pueden ser resultado de cambios de un equilibrio a otro generados por creencias, profecías autocumplidas, o choques que no tienen ningún efecto real sino cambian la cordinación de los agentes económicos (*sunspots*). El origen de estos trabajos se basa en el problema de falta de unicidad de equilibrio en modelos de equilibrio con generaciones traslapadas, pero se han extendido a modelos con agentes representativos donde hay imperfecciones en los mercados o la tecnología puede generar equilibrios múltiples. De esta literatura son referente los trabajos de Azariadis (1981), Cass and Shell (1983), Benhabib and Farmer (1994) y Farmer and Guo (1994). Farmer (1999) es el libro de referencia en estos temas.

Índice general

Capítulo 1

Modelo de Ciclos Reales

Este capítulo esta dedicado al estudio del modelo de referencia de la macroeconomía moderna: el modelo de ciclos reales de negocios (*Real Business Cycle* -RBC) desarrollado inicialmente por Kydland and Prescott (1982). Desde su versión inicial el modelo RBC ha sido modificado en diferentes direcciones, pero su contribución a la macroeconomía moderna permanece: un modelo macroeconómico debe ser construido con base en fundamentos microeconómicos, es decir, modelos en los que el comportamiento de lo agentes se deriva partiendo de supuestos básico sobre las preferencias de los consumidores, la tecnología de producción, y la información disponible para la toma de decisiones. La fundamentación en principios microeconómicos de los modelos agregados es justificable con base en dos principios fundamentales. Primero, los modelos con fundamentos microeconómicos tienen que respetar una coherencia interna dado que describen las motivaciones últimas de los agentes económicos. Esto permite analizar intervenciones de política utilizando métodos estándar de la economía del bienestar. Segundo, como señala Lucas (1987), un modelo con fundamentos micro amplía las fuentes de datos empíricos que pueden ser utilizados para asignar valores numéricos a los parámetros del modelo. Esta segundo aspecto sigue siendo un reto, dado que no es obvio como transferir estimaciones hechas con base de datos al nivel de hogares o firmas a modelos con agentes representativos o con modelos heterogéneos pero con un alto nivel de simplificación. Más allá de las posibles críticas, los modelos de la macroeconomía moderna sigue usando supuestos microeconómicos permitiendo un constante dialogo entre la teoría microeconómica y los trabajos empíricos y los modelos agregados.

Con el fin último de presentar el modelo de referencia de ciclos reales y explorar varias de sus más recientes modificaciones, este capítulo discute primero una versión determinística del modelo neoclásico de crecimiento con un planificador central (*central planner*) donde la oferta de trabajo es completamente inelástica (*inelastic or exogenous labor supply*). Este modelo servirá para ilustrar el concepto de solución de modelos dinámicos que será necesario para luego entender la dinámica de modelos con incertidumbre y con una oferta de trabajo endógena.

1.1. Modelo Neoclásico de Crecimiento

El tiempo es discreto y el horizonte de optimización es infinito $t = \{0, 1, 2..\}$[1]. El supuesto de horizonte infinito se puede racionalizar bajo la simple observación de que si bien la gente no vive para siempre, si se preocupa por sus descendientes. Bajo el supuesto de que los agentes descuentan consumo futuro con un factor de descuento β, podemos interpretar β^t como el peso que un individuo asigne a la utilidad de sus descendientes t generaciones posteriores. Adicionalmente, el supuesto de horizonte infinito ayuda a simplificar la solución del modelo dado que modelos con horizonte infinito son estacionarios en naturaleza - el horizonte de tiempo restante no cambia a medida que el tiempo avanza. Finalmente, muchos de los modelos macroeconómicos con un horizonte finito tienden a mostrar resultados muy similares a los modelos con horizonte infinito, si el tiempo es lo suficientemente largo[2].

En esta versión del modelo neoclásico asumiremos que las preferencias del planificador sobre la secuencia de consumo (c_t) son del tipo $log(c_t)$ y que la función de producción es tipo Cobb-Douglas: $zk_t^{\alpha} l_t^{1-\alpha}$. Sin perdida de generalidad podemos asumir que $l_t = 1$,

[1] En estas notas solo nos referimos a modelos donde el tiempo es discreto y no continuo. La mayoría de modelos macroeconómicos estas definidos en tiempo discreto, no obstante pueden ser también analizados en tiempo continuo con las técnicas de optimización respectivas.

[2] La similitud entre los modelos con finito e infinito horizonte no está presente en todos los modelos de la economía. Por ejemplo, en la teoría de juegos dinámicos, los resultados cambian sustancialmente cuando el juego pasa de un horizonte de tiempo determinado, así sea largo, a un juego de horizonte infinito (*Folk Theorem*).

en esta versión donde la cantidad de horas trabajadas es completamente inelástica. El capital se deprecia cada periodo en una fracción δ y el planificador decide cuando invertir en cada periodo: i_t. No hay incertidumbre agregada en la economía dado que el nivel de productividad agregada de los factores, z, es fijo.

1.1.1. Problema de Optimización del Planificador Central

El problema puede resumirse en las siguientes ecuaciones:

$$max_{\{c_t,k_{t+1}\}_0^\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t log\left(c_t\right) \tag{1.1}$$

sujeto a la siguiente restricción de recursos:

$$c_t + k_{t+1} - (1-\delta)\, k_t = z k_t^{\alpha}\, \forall t \tag{1.2}$$

Donde k_0 está dado. Siendo este un problema de optimización restringido requiere hacer uso de las condiciones de primer orden (Kuhn-Tucker) para encontrar una secuencia óptima tal que el valor marginal de cualquier variable de elección en la utilidad es cero:

$$\mathscr{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[log\left(c_t\right) + \lambda_t \left[z k_t^{\alpha} - c_t - k_{t+1} + (1-\delta)\, k_t\right]\right]$$

Consideremos las secuencias que el planificador central elige para el consumo y la acumulación de capital de acuerdo a la siguientes condiciones óptimas:

$$\frac{1}{c_t} = \lambda_t \tag{1.3}$$

$$\lambda_t = \beta \left[\lambda_{t+1} \left[\alpha z k_{t+1}^{\alpha-1} + (1-\delta)\right]\right] \tag{1.4}$$

La primera ecuación nos dice que la utilidad marginal del consumo deber ser igual al precio-sombra (el multiplicador) de la restricción de recursos para cada período. Una unidad marginal del bien de consumo aumenta la utilidad del planificador central igual a la utilidad marginal del costo de limitar por λ_t la restricción. La segunda condición es la ecuación de Euler y nos dice que invertir una unidad adicional del bien de consumo hoy, cuyo costo es igual a la utilidad marginal de consumo, debe tener un beneficio descontado igual al producto marginal del capital mañana, ajustado por la depreciación. Combinando las dos condiciones anteriores tenemos la siguiente expresión:

$$\frac{1}{c_t} = \beta\left[\frac{1}{c_{t+1}}\left[\alpha z k_{t+1}^{\alpha-1} + (1-\delta)\right]\right] \tag{1.5}$$

La solución al problema del planificador es una secuencia infinita de consumo y capital que satisfagan la ecuación (1.2) y la ecuación (1.5)[3]. Antes de discutir la solución de este problema podemos verificar que el problema del planificador central es idéntico al problema descentralizada donde consumidores y firmas participan en el mercado de capital y trabajo. Esta equivalencia entre la solución del planificador y el equilibrio descentralizado donde se aplican los dos teoremas principales de bienestar es resultado de asumir mercados de competencia perfecta (agentes tomadores de precios) y ausencia de fricciones en la economía.

1.1.2. Economía descentralizada

1.1.2.1. Consumidores

En una economía descentralizada los consumidores, representados por las mismas preferencias usadas anteriormente, deciden la secuencia óptima de consumo e inversión sujetos a una restricción de presupuesto[4]:

$$max_{\{c_t,k_{t+1}\}_0^\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t log\left(c_t\right) \tag{1.6}$$

$$c_t + k_{t+1} - (1-\delta)\,k_t = w_t + r_t k_t \;\forall t \tag{1.7}$$

[3]Para la secuencia optima también debe satisfacer la condición de transversalidad que indica que: $lim_{t\to\infty}\lambda_t k_t = 0$

[4]Dado que ahora tenemos precios en la economía (salarios y renta del capital) podemos llamar a la que antes denominamos restricción de recursos (*resource constraint*), restricción presupuestal (*budget constraint*)

La solución a este problema es una ecuación de Euler similar a la del planificador:

$$\frac{1}{c_t} = \beta\left[\frac{1}{c_{t+1}}\left(r_{t+1} + (1-\delta)\right)\right]$$

1.1.2.2. Firmas

Las firmas en esta economía maximizan beneficios con base en la tecnología que tienen y el costo de mano de obra y de la renta del capital.

$$max_{\{l_t,k_t\}_{t=0}^{\infty}}\pi_t = zk_t^{\alpha}l_t^{1-\alpha} - w_t l_t - r_t k_t$$

Dado que la economía es perfectamente competitiva, los beneficios de la empresa son cero y el pago de cada factor de producción es igual a su contribución marginal al producto. El equilibrio en el mercado de trabajo donde la oferta es igual a uno, nos permite encontrar el nivel de salario de la economía. Es importante anotar que dado que la firma no tiene ninguna decisión intertemporal, la solución a su problema es estática ya que cada periodo se resuelve de la siguiente forma:

$$w_t = (1-\alpha)\,zk_t^{\alpha}$$
$$r_t = \alpha z k_t^{\alpha-1}$$

Usando las condiciones óptimas de la firma y los consumidores es fácil verificar que la solución al problema descentralizado coincide con la solución del planificador central.

1.1.3. Estado Estacionario (Non-Stochastic Steady-State)

Es posible encontrar un estado estacionario donde la economía exhibe un nivel constante de consumo, capital, inversión (i), producto (y). Usando la ecuación de Euler y la restricción de recursos podemos encontrar el estado estacionario:

$$\bar{k} = \left(\frac{\alpha\beta z}{1-\beta(1-\delta)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$\bar{i} = \delta \left(\frac{\alpha\beta z}{1-\beta\left(1-\delta\right)} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$\bar{y} = \left(\frac{\alpha\beta z}{1-\beta\left(1-\delta\right)} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$\bar{c} = \bar{y} - \delta\bar{k}$$

1.2. Programación Dinámica

Para encontrar la solución al modelo acá planteado tenemos en principio, que buscar una solución a una secuencia infinita de ecuaciones - más concretamente una secuencia de ecuaciones diferenciales (la ecuación de Euler). La búsqueda de una secuencia de este estilo muchas veces es inviable. Un enfoque alternativo es la llamada programación dinámica.

Antes de entrar en los detalles más técnicos, exploremos el concepto básico detrás de la programación dinámica. La clave para entender este método es pensar que las decisiones dinámicas no necesariamente se tienen que describir por una secuencia completa, es decir una decisión de una sola vez, pero que pueden pensarse de forma «recursiva»: período a período.

La decisión de inversión para cualquier periodo puede describirse desde el comienzo del tiempo ($t = 0$), o puede describirse como una decisión entre t y $t+1$ condicional a un nivel de capital alcanzado. Un problema es estacionario siempre y cuando la estructura del problema es tal que la elección es idéntica (recursiva) en todos los puntos en el tiempo.

Escribamos la función que maximiza el consumo para todo el horizonte del tiempo del modelo básico:

$$V\left(k_0\right) = max_{\{c_t,k_{t+1}\}_0^\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t log\left(c_t\right) \tag{1.8}$$

sujeto a la restricción de recursos. La función V expresa el máximo valor intertemporal de utilidad del consumidor y es función de k_0. Esta función V es denominada *función de valor (value function)* y hace que sea posible expresar el problema original (problema secuencial), como un problema recursivo:

$$V(k) = max_{c,k'} \left[log(c) + \beta V\left(k'\right) \right] \tag{1.9}$$

sujeto a:

$$c + k^{'} - (1-\delta)k = zk^{\alpha}$$

donde k es el capital en el periodo actual, y $k^{'}$ es el stock de capital del siguiente periodo. Nótese que el componente temporal ha sido eliminado del problema recursivo ya que las variables no están indexadas por t. En un modelo con horizonte finito, el tiempo es importante, y el problema no es estacionaria: importa cuántos períodos quedan; el problema cambia en medida que pasa el tiempo. Con un horizonte de tiempo infinito, sin embargo, el horizonte restante es el mismo en cada punto en el tiempo. Una vez el consumidor ha encontrado la secuencia óptima de consumo y de acumulación de capital para todo el horizonte futuro de tiempo, dicha secuencia solo depende del nivel de capital actual. En este caso decimos que el nivel de capital es una variable de estado porque resume toda la información relevante para la solución del problema de optimización.

La ecuación 1.9 es conocida como la ecuación de Bellman y es una ecuación funcional (*functional equation*) dado que es una función la que la soluciona y no un valor. Así el concepto de solución del problema no es una secuencia infinita de valores- consumo y capital en este ejemplo- como en el problema original sino una función que maximiza la utilidad de los consumidores para todo el horizonte de optimización dado una variable de estado - el acervo de capital. Si la función V existe y la podemos encontrar, también podemos encontrar el argumento que la maximiza, es decir:

$$\hat{k}^{'}(k) = argmax_{c,k'} \left[log(c) + \beta V\left(k'\right) \right] \tag{1.10}$$

dada la restricción.

$$c+k^{'}-(1-\delta)\,k=zk^{\alpha}$$

Sea g la función que define la relación entre k y $\hat{k}'$: $g\,(k)=\hat{k}'$ donde $g:R_{+}\rightarrow R_{+}$. Esta función es denominada la *función de política (policy function)* ya que nos indica el nivel óptimo de capital a elegir dado cualquier nivel actual de capital. En la mayoría de casos estamos más interesados en describir la solución del problema en términos de la función de política que en términos de la función de valor, dado que el nivel de utilidad es en muchos casos irrelevante dado que las preferencias se puede re-escalar sin modificar el equilibrio del modelo. En cualquier caso, el reto reside en encontrar la solución y caracterizar la funciones de valor y política.

1.3. Métodos de Solución

Existen varios métodos de solución a los problemas de programación dinámica. En esta sección discutiremos dos: iteración de la función de valor y de la función de política. Para entender estos dos métodos tendremos que hacer algunas precisiones matemáticas para poder caracterizar la existencia y las propiedades del concepto de solución. Posteriormente, es necesario entender los algoritmos computacionales que implementan dichos conceptos.

1.3.1. Iteración de la Función de Valor

Este método consiste en encontrar la función de valor que soluciona la ecuación de Bellman (1.9) como el limite a una secuencia de iteraciones:

$$V_{j+1}\,(k)=max_{c,k'}\left[log\,(c)+\beta V_{j}\left(k'\right)\right]$$

dada la restricción.

$$c+k^{'}-(1-\delta)\,k=zk^{\alpha}$$

cuando $j \to \infty$. Usualmente la primera iteración inicia con $V_0(k) = 0$, aunque puede arrancar con otra conjetura, y termina cuando la función V converge. En general este método requiere ciertas propiedades en las preferencias y el tipo de restricciones, así como una definición matemática de convergencia para una secuencia de funciones.

1.3.1.1. Teorema de Contracción

Para mostrar que la iteración de funciones converge a la solución del problema necesitamos definir una contracción y los elementos necesarios para hablar de convergencia de funciones. El primer elemento, el espacio métrico nos ayuda a definir el concepto de conjunto y de la «distancia» que separa sus elementos.

Definición 1. Un espacio métrico esta definido por un conjunto X y una medida $d : X \times X \to R$ que cumpla las siguientes propiedades:

1. Positiva: $d(x,y) \geq 0$ para todo $x, y \in X$
2. Estrictamente positiva: $d(x,y) = 0$ si y solo si $x = y$
3. Simetría: $d(x,y) = d(y,x)$ para todo $x, y \in X$
4. Desigualdad del Triángulo: $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ para todo $x, y, z \in X$

Ejemplo 1. El conjunto de los números enteros en si mismo y la medida del valor absoluto son un espacio métrico. En este caso X es el conjunto de números y la distancia es $d = |x-y|$. Las primeras tres propiedades son triviales dada la definición de valor absoluto: $|x-y| \geq 0$, $|x-x| = 0$, $|x-y| = |y-x|$. La desigualdad del triángulo es fácil de corroborar: $|x-y| = |x-z+z-y| \leq |x-z| + |x-z|$.

Ejemplo 2. El conjunto de funciones continuas y estrictamente crecientes en el intervalo $[a,b]$ y $d(x,y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| dt$ son un espacio métrico. Las propiedades (1)-(3) son evidentes dada la definición de valor absoluto y la desigualdad del triángulo puede probarse como en el ejemplo anterior: dado tres funciones arbitrarias $\{x, y, z\}$ que pertenezcan a X, podemos verificar que $d(x,y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| dt = \int_a^b |x(t) - z(t) + z(t) - y(t)| dt \leq \int_a^b (|x(t) - z(t)| + |z(t) - y(t)|) dt = \int_a^b |x(t) - z(t)| dt + \int_a^b |z(t) - y(t)| dt = d(x,y) + d(z,y)$

Definición 2. Una secuencia $\{x_n\}_0^\infty$ que pertenece a un espacio métrico es llamada una secuencia *Cauchy* si y solo si para cualquier $\varepsilon > 0 : \varepsilon \in R$ existe un $N(\varepsilon) : N \in R$ tal que: $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ para todo $n, m \geq N(\varepsilon)$

Intuitivamente, una secuencia Cauchy es aquella en que los puntos son cada vez más cercanos (dada una métrica).

Definición 3. Un espacio métrico es *completo* si todas las secuencias Cauchy en X convergen a un elemento en X.

Ejemplo 3. El conjunto de los números enteros y la medida del valor absoluto son un espacio métrico completo. Sea $\{x_n\}$ una secuencia Cauchy donde $x_n \in X$ para todo n. Para cualquier $\varepsilon \in (0,1)$, existe un $N(\varepsilon)$ tal que $|x_n - x_m| < \varepsilon < 1$ para todo $n, m \geq N(\varepsilon)$ tal que $x_n = x_m \equiv x$ donde $x \in X$.

Ejemplo 4. El conjunto de funciones continuas y estrictamente crecientes en el intervalo $[a,b]$ y $d(x,y) = \int_a^b |x(t) - y(t)|dt$ no son un espacio métrico completo. Se puede mostrar que este espacio métrico no es completo con el siguiente ejemplo: Consideremos la secuencia de funciones: $x_n(t) = 1 + \frac{t}{n}$ para todo $t \in [a,b]$. Dado un valor arbitrario m, la métrica d es: $d(x_n, x_m) = \int_a^b |x_n(t) - x_m(t)|dt = \int_a^b |\frac{t(m-n)}{nm}|dt = \frac{m-n}{2mn}\left[b^2 - a^2\right]$. Cuando $n, m \to \infty$, $d(x_n, x_m) \to 0$ pero la secuencia $x_n(t) \to x(t) = 1$ que es una función constante (no creciente).

Definición 4. Un operador es una función f que al aplicarse a un espacio métrico (X,d) lo «mapea» al mismo espacio métrico (X,d). En otras palabras, la función $f$es un operador si el dominio y el co-dominio son el mismo espacio métrico. Un operador $f$es una contracción si existe un numero real $k \in [0,1)$ tal que:

$$d[f(x), f(y)] \leq kd(x,y)\ \forall x, y \in X$$

Teorema 1. *Dado un espacio métrico completo (X,d) y una función operador $f : X \to X$ que es una contracción, existe un único punto x_0 en el conjunto X tal que $f(x_0) = x_0$.*[5]

[5] Ver Ljungqvist and Sargent (2004) para una prueba de este teorema

Teorema 2. *Sea T un operador en un espacio métrico completo (X,d) donde X es un conjunto de funciones, T es una contracción con módulo $\beta \in (0,1)$ si cumple las siguientes condiciones (Blackwell's Sufficient Conditions):*

Monotonicidad: Para cualquier $x,y \in X$, si $x \geqslant y$ entonces $T(x) \geqslant T(y)$

Discontinuidad: Sea c una función constante e igual a c para todo el dominio definido para las funciones en X, entonces para todo $x \in X$, $T(x+c) \leq T(x) + \beta c$

Con estas definiciones podemos estudiar bajo que condiciones y con que criterio existe una solución al problema de programación dinámico. Antes de aplicar directamente estos conceptos al modelo neoclásico, definamos un problema de programación dinámico más general de la siguiente manera:

$$V(k) = max_{u \in R^k} \left\{ r(k,u) + \beta V\left(k'\right) \right\}$$

donde $k' \leq g(k,u)$ y $\beta \in (0,1)$. Asumamos que $r(k,u) : R^2 \to R$ es continua, cóncava y acotada (*continuos, concave and bounded*). La restricción $g(k,u)$ es convexa y compacta. Definamos el operador T de la siguiente manera:

$$T(V(k)) = max_{u \in R^k} \left\{ r(k,u) + \beta V\left(k'\right) \right\}$$

con $k' \leq g(k,u)$ y $k \in R$, donde $V(k)$ pertenece a un espacio métrico completo (X,d) donde X es el conjunto de funciones continuas y acotadas $X : f \to R$ y $d(V,W) = sup_{k \in R} |V(k) - W(k)|$. Este operador T cumple con las condiciones de Blackwell, por lo tanto existe un punto fijo en la contracción tal que:

$$T(V(k)) = V(k)$$

en el espacio de funciones acotadas y continuas. Este punto fijo se puede encontrar en el limite , bajo la métrica d iterando el uso del operador T:

$$V_n = T_n(V_0(k))$$

comenzando por una función arbitraria $V_0(k)$ de la familia de funciones acotadas y continuas. Se puede mostrar adicionalmente que el operador T mapea funciones cóncavas en funciones cóncavas, así que la solución al problema del punto fijo es una función cóncava también.[6] Nótese que en general el teorema de contracción requiere que la función $r(k,u)$ sea acotada. En el caso de la mayoría de aplicaciones económicas, no es el caso, dado que la función de utilidad de los consumidores no es acotada. No obstante es posible solucionar el problema de programación dinámico dado el conjunto de posibilidades de producción (ver sección 4.4 de Stokey et al. (1989).

En la mayoría de casos no existe una solución analítica que nos permita encontrar la solución usando la iteración de la función de valor. No obstante, si asumimos que la depreciación del capital es del 100 %, podemos mostrar la convergencia de este procedimiento analíticamente (este ejemplo es una referencia al clásico artículo de Brock and Mirman (1972)) . En este caso el problema es:

$$V(k) = max_{k'}\left[log\left(zk^{\alpha} - k^{'}\right) + \beta V\left(k'\right)\right] \tag{1.11}$$

Iniciemos la iteración asumiendo $V_0(k) = 0$. En este caso:

$$V_1(k) = max_{k'}\left[log\left(zk^{\alpha} - k^{'}\right)\right] = log(z) + \alpha log(k)$$

que implica que $k^{'} = 0$ y la función de valor se transforma en:

$$V_1(k) = log(z) + \alpha log(k)$$

La siguiente iteración es:

$$V_2(k) = max_{k'}\left[log\left(zk^{\alpha} - k^{'}\right) + \beta\left[log(z) + \alpha log\left(k'\right)\right]\right]$$

que implica que $k^{'} = \frac{\alpha\beta z k^{\alpha}}{1+\alpha\beta}$ y la función de valor se transforma en:

$$V_2(k) = (1+\alpha\beta)\,log(z) + (1+\alpha\beta)\,\alpha log(k) + (\alpha\beta)\,log(\alpha\beta) - (1+\alpha\beta)\,log(1+\alpha\beta)$$

La siguiente iteración es:

[6] Para una discusión mas completa al respecto referirse a Stokey, Lucas, and Prescott (1989)

$$V_3(k) = max_{k'}\left[log\left(zk^{\alpha}-k^{'}\right)+\beta\left[(1+\alpha\beta)\,log(z)+(1+\alpha\beta)\,\alpha log(k)+F\right]\right]$$

que implica que $k^{'} = \frac{\alpha\beta(1+\alpha\beta)zk^{\alpha}}{1+\alpha\beta(1+\alpha\beta)}$ y donde F es una constante. Dada la serie geométrica que aparece en la iteración de la función de política, es posible encontrar el limite de esta secuencia que converge a:

$$k^{'} = \alpha\beta zk^{\alpha} \tag{1.12}$$

$$V(k) = \frac{log(1-\alpha\beta)}{1-\beta}+\frac{log(z)}{1-\beta}+\frac{\alpha log(k)}{1-\beta}. \tag{1.13}$$

Si de antemano conociéramos la forma funcional de la función de valor que soluciona el problema dinámico seria más eficiente utilizar el procedimiento de conjetura y verificación para encontrar los parámetros de la función de valor y de la función de política. Obviamente, son pocos los casos donde conocemos dicha forma funcional. En este ejemplo en concreto podemos conjeturar ex-post una función de valor de la siguiente forma:

$$V(k) = E+Flog(k)$$

El problema de optimización en este caso es:

$$V(k) = max_{k'}\left[log\left(zk^{\alpha}-k^{'}\right)+\beta E+\beta Flog\left(k^{'}\right)\right] \tag{1.14}$$

y el nivel óptimo de capital es: $k^{'} = \frac{\beta F}{1+\beta F}zk^{\alpha}$. Por tanto:

$$V(k) = (\alpha+\alpha\beta F)\,log(k)+(1+\beta F)\,log(z)-(1+\beta F)\,log(1+\beta F)+\beta Flog(\beta F)+\beta E \tag{1.15}$$

usando el método de coeficientes indeterminados tenemos:

$$F = \frac{\alpha}{1-\alpha\beta}$$

$$E = \left(\frac{(1+\beta F)\,log\,(z) - (1+\beta F)\,log\,(1+\beta F) + \beta F log\,(\beta F)}{1-\beta} \right)$$

En este caso llegamos al mismo resultado que con el proceso más largo de iteraciones de la función de valor : $k^{'} = \alpha\beta z k^{\alpha}$ donde F puede interpretarse como la suma geométrica de la secuencia $\alpha\left[1+\alpha\beta+\left(\alpha\beta^{2}\right)+..\right]$.

1.3.2. Iteración de Función de Política

Un método alternativo es el llamado iteración de función de política (o también conocido como algoritmo de Howard - *Howard's improvement algorithm*). Como su nombre lo indica, en este caso la solución del problema recursivo requiere una conjetura e iteración con base en la función de política. Las condiciones bajo las cuales podemos probar la existencia de una solución al problema recursivo usando el método de iteración de política son similares a las discutidas anteriormente para el caso de la iteración de la función de valor.

En general podemos definir un operador T indexado a la función de política $\mu\,(k)$:

$$T_g\,(V\,(k)) = max_{\mu(k)}\,\{r\,(k,\mu\,(k)) + \beta V\,[g\,(k,\mu\,(k))]\}$$

El operador T_g mapea funciones continuas y acotadas en un conjunto de funciones continuas y acotadas $(f : X \to X)$. El operador satisface las condiciones de Blackwell:

1. Monotonicidad: si $V\,(k) \geq W\,(k)$, entonces,

$$T_\mu\,(V\,(k)) = max_{\mu(k)}\,\{r\,(k,\mu\,(k)) + \beta V\,[g\,(k,\mu\,(k))]\}$$

$$\geq max_{\mu(k)}\,\{r\,(k,\mu\,(k)) + \beta W\,[g\,(k,\mu\,(k))]\} = T_\mu\,(W\,(k))$$

2. Discontinuidad: Para cualquier constante c,

$$T_\mu\,(V\,(k)+c) = max_{\mu(k)}\,\{r\,(k,\mu\,(k)) + \beta\,[V\,[g\,(k,\mu\,(k))] + c]\}$$

$$= max_{\mu(k)}\,\{r\,(k,\mu\,(k)) + \beta W\,[g\,(k,\mu\,(k))] + \beta c\} = T_\mu\,(V\,(k)) + \beta c$$

Dado que T es un operador que cumple con las condiciones de Blackwell, la ecuación funcional $V_{\mu}(k) = T_{\mu}\left(V_{\mu}(k)\right)$ tiene una única solución (punto fijo) en el espacio de funciones continuas y acotadas y se puede encontrar como el límite de iteraciones del operador T iniciado desde cualquier función $V_0(k)$, arbitraria, en el espacio X.

En términos prácticos, este algoritmo comienza con una función de política arbitraria y después de aplicar el operador T, itera usando como nueva conjetura de función de política el resultado obtenido. Los pasos de los algoritmo se resumen entonces en:

1. Para una función de política $\mu_1(k)$ calcular el valor de la función de valor asociada: $V_{\mu_1}(k)$.

2. Aplicar el operador T y encontrar una nueva función de política $\mu_2(k)$. Usar la nueva función de política e iterar desde el primer paso.

Ilustremos este procedimiento con un ejemplo:

Ejemplo 5. Consideremos el mismo modelo antes analizado de Brock and Mirman (1972):

$$V(k) = max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t log(c_t)$$

sujeto a $c_t + k_{t+1} = zk_t^{\alpha}$. Conjeturemos una función de política de la forma: $k_{t+1} = \lambda k_t^{\alpha}$ donde λ es una constate positiva. Con base en esta función de política podemos calcular la función de valor asociada:

$$V(k) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t log(zk_t^{\alpha} - k_{t+1}) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t log(zk_t^{\alpha} - \lambda k_t^{\alpha})$$

$$= \frac{z-\lambda}{1-\beta} + \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\alpha log(k_t)\right]$$

$$= \frac{log(z-\lambda)}{1-\beta} + \frac{\alpha}{1-\alpha\beta} logk_0 + \frac{\alpha\beta}{1-\beta} log\lambda + H$$

donde H es una constante que captura otros elementos (constantes) de la sumatoria. Ahora usamos el operador T iterando en la función de valor:

$$max_{k'}\left[log\left(zk^{\alpha}-k^{'}\right)+\beta\left[\frac{log\left(z-\lambda\right)}{1-\beta}+\frac{\alpha}{1-\alpha\beta}logk^{'}+\frac{\alpha\beta}{1-\beta}log\lambda+H\right]\right]$$

para encontrar la nueva función de política: $k^{'}=\alpha\beta zk^{\alpha}$. En este caso sabemos que esta nueva función de política es la solución al problema ya que coincide con la solución que encontramos mediante el método de iteración de la función de valor. En general, seria necesario encontrar de nuevo la función de valor asociada a esta función de política e iterar hasta encontrar un punto fijo. Este ejemplo ilustra que el método de iteración de política puede ser más rápido y eficiente que el método de función de valor. Ya que son poco los problemas que tienen solución analítica, la decisión de cual de estos dos métodos es mas eficiente y rápido depende de la implementación numérica.

1.4. Modelos Estocásticos

El modelo que hemos analizado a este momento es un modelo determinístico, no existe incertidumbre en la senda de crecimiento de la economía. Los modelos de ciclos reales, y en general los modelos macroeconómicos de equilibrio general, suponen choques a la economía que generan fluctuaciones en la actividad económica. Las fuentes de incertidumbre en la economía moderna pueden ser de naturaleza variada, pero como punto de partida analizaremos modelos donde el nivel de productividad agregada, o más precisamente, la productividad total de los factores, esta sujeta a choques estocásticos. La introducción de incertidumbre en el modelo no solo implica que conceptualmente tenemos que pensar en el concepto de riesgo y como los choques afectan a la economía, sino también modifica el concepto de convergencia del caso determinístico. Ausente de cualquier choque, el modelo neoclásico de crecimiento converge en el infinito a un estado estacionario. Cuando tenemos un componente estocástico, el modelo siempre esta expuesto a choques y por tanto no se estaciona en un valor constante. En este caso las variables del modelo fluctúan dentro de un rango de valores, conjunto que lo llamaremos conjunto ergódico. Para que el modelo converja a un conjunto ergódico, necesitamos que los choques agregados, en este caso los choques de productividad, cumplan con ciertas propiedades. En otras palabras, la distribución de probabilidad que genera estos choques tiene que ser "estacionaria" para que el modelo tenga un estado estacionario ergódico.

En general, cuando pensamos en una distribución de choques productivos cualquiera, la decisión de acumular capital en cualquier punto del tiempo depende de los choques de productividad ocurridos hasta el periodo t y las expectativas de la secuencia de futuros choques. El acervo de capital en el tiempo t resume entonces toda la información relevante aportada por la secuencia de choques productivos hasta el periodo t. La secuencia optima de capital en este caso estaría definida por : $\{k_{t+1}(z_0, z_1, z_2..z_t)\}_{t=0}^{\infty}$. En este caso, no podemos hacer uso del modelo recursivo ya que la historia (completa) de los choques es relevante y necesaria para la toma de decisiones.

Existe, no obstante, una estructura de choques donde toda la historia esta contenida, resumida, en el ultima observación. Esta estructura, este tipo de proceso estocástico, es conocido como proceso de Markov (*Markov process*).

Definición 5. Proceso de Markov (propiedad de Markov) para un número finito de posibles estados: Un proceso estocástico $\{z_t\}$ cumple con las propiedades de Markov si para cualquier tiempo t:

$$p(z_{t+1}|z_0, z_1, z_2...z_t) = p(z_{t+1}|z_t)$$

donde $p(\cdot|)$ es la probabilidad condicional del proceso. Un proceso estocástico que cumpla con la propiedad de Markov, es una cadena de Markov (*Markov chain*) debe estar definido por tres objetos:

1. Un vector de dimensión n que registra los posibles valores que el choque puede tomar: $z \in R_{+}^{n}$

2. Una matriz de transición P que indica la probabilidad de moverse de un estado (un valor) a otro estado (otro valor) del proceso. La matriz de probabilidad P representa la siguiente información:

$$P_{ij} = p\left(z_{t+1} = z^i | z_t = z^j\right) \forall i, j$$

3. Un vector de probabilidad π_0 de dimensión $(n \times 1)$ que define la probabilidad (in-

condicional) de cada estado en el tiempo inicial.

Si el proceso estocástico de productividad agregada es un proceso de Markov- una cadena de Markov-, podemos escribir el problema recursivamente de la siguiente manera:

$$V(z,k) = max_{c,k'}\left[log(c) + \beta E\left[V\left(z^{'},k'\right)\right]\right] \tag{1.16}$$

sujeto a:

$$c + k^{'} - (1-\delta)k = zk^{\alpha}$$

donde $E[]$ representa el valor esperado (condicional) de la función de valor condicional y z tiene asociado una matriz P y un vector π_0. Resulta intuitivo que si toda la información del proceso estocástico esta resumida en la última observación, es posible plantear el problema recursivo donde el proceso estocástico es ahora una variable de estado adicional.

Volvamos al ejemplo de Brock and Mirman (1972) pero en el caso donde la productividad es estocástica. No es difícil verificar que podemos usar cualquiera de las dos técnicas de solución antes estudiadas y encontrar que la solución óptima al problema implica una función de política análoga: $k^{'} = \alpha\beta zk^{\alpha}$. El concepto de solución, no obstante, es más complicado porque z evoluciona estocásticamente, así que en el largo plazo (en el limite infinito) la solución no converge a un estado estado estacionario (un valor constante) para el capital, sino a un conjunto de valores, que llamaremos el conjunto ergódico consistentes con una distribución estacionaria de productividad.

Definición 6. Un proceso de Markov que evoluciona de acuerdo a la siguiente ley de transición $\pi_{t+1} = \pi_t P$ es estacionario cuando: $\pi_{t+1} = \pi_t$, es decir cuando la probabilidad incondicional de cualquier estado es constante.

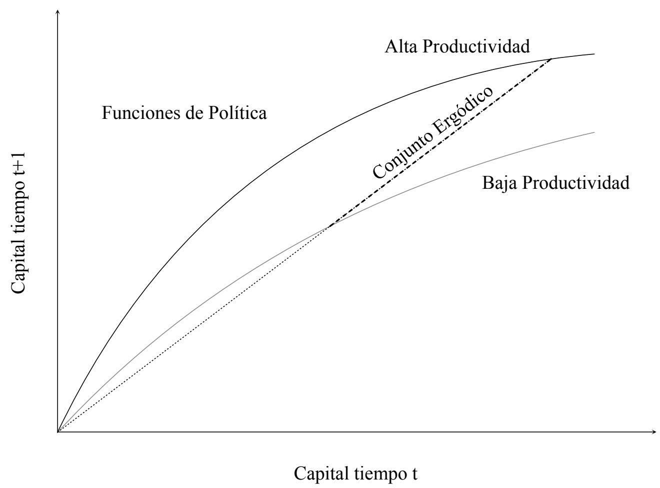
Ejemplo 6. Asumamos un proceso estocástico Markov para la productividad con dos niveles posibles (alto - *high* y bajo -*low*) en el modelo de Brock and Mirman (1972). En este caso la función de política toma dos valores, respectivamente:

$$k^{'}(z_{H,}k_H) = \alpha\beta z_H k_H$$

$$k^{'}\left(z_{L,}k_{L}\right)=\alpha\beta z_{L}k_{L}$$

la matriz P del proceso nos indica la transición entre los dos estados. La distribución estacionaria del proceso nos indica las probabilidades incondicionales de los dos estados y nos garantiza que la solución al problema es un nivel de capital en el conjunto ergódico (*ergodic set*) entre las dos curvas representadas en la Figura (1.1), a menos que P sea un matriz diagonal y alguno de los estados sea un estado absorvente (*absobirng state*) y la solución del modelo colapsa a alguno de los dos estados.

Figura 1.1: Ejemplo Función de Política Caso Estocástico



Los procesos auto-regresivos también nos permiten hacer uso de la técnicas de programación dinámica así el numero de estados no sea discreto y finito. Por ejemplo podemos asumir que el proceso estocástico de productividad es auto-regresivo de primer orden con errores que siguen una distribución *Gaussiana*. En este caso el problema recursivo esta definido también porque el valor actual del choque resume toda la historia relevante. En este caso, y siguiendo con el ejemplo de Brock and Mirman (1972), el problema queda definido así:

$$V\left(z,k\right)=max_{c,k'}\left[log\left(c\right)+\beta E\left[V\left(z^{'},k'\right)\right]\right] \tag{1.17}$$

sujeto a:

$$c + k^{'} = zk^{\alpha}$$

$$log\left(z^{'}\right) = \rho log\left(z\right) + \varepsilon^{'}$$

donde $\rho \in (0,1)$ es el coeficiente de autocorrelación, $\varepsilon \sim N\left(0,\sigma^2\right)$ y k_0 y z_0 están dados. En este caso el proceso estocástico de productividad es log-normal y la esperanza condicional del proceso en cada momento del tiempo esta contenida en la última realización del proceso: $E\left[z^{'}|z\right] = \rho z$. La solución a este problema recursivo toma la misma forma: $k^{'} = \alpha\beta z k^{\alpha}$. En este caso podemos verificar que la distribución del capital es log-normal y converge asintóticamente a una distribución ergódica:

$$\begin{aligned} log\left(k_t\right) &= log\left(\alpha\beta\right) + log\left(z_t\right) + \alpha log\left(k_{t-1}\right) \\ &= log\left(\alpha\beta\right)\sum_{j=0}^{t}\alpha_j + log\left(z_0\right)\sum_{j=0}^{t}\alpha^j\rho^{t-j} + \alpha^t log\left(k_0\right) + \sum_{j=0}^{t}\rho^{t-j}\varepsilon_{t-j}\sum_{j=0}^{t}\alpha^j \end{aligned}$$

El valor esperado (incondicional) del log de capital en el periodo inicial es:

$$E_0\left[log\left(k_t\right)\right] = \frac{1-\alpha^{t+1}}{1-\alpha}log\left(\alpha\beta\right) + \frac{\rho^t\left(1-\left(\frac{\alpha}{\rho}\right)^{t+1}\right)}{1-\left(\frac{\alpha}{\rho}\right)}log\left(z_0\right) + \alpha^t log\left(k_0\right)$$

La varianza (incondicional) del log de capital en el periodo inicial es:

$$V\left[log\left(k_t\right)\right] = V\left[log\left(\alpha\beta\right) + log\left(z_t\right) + \alpha log\left(k_{t-1}\right)\right] = \frac{1-\alpha^{2t}}{1-\alpha^2}\frac{\sigma^2}{1-\rho^2}$$

Esto implica que $log(k_t) \sim N\left(\mu_t, \hat{\sigma}_t^2\right)$ con

$$\mu_t = \frac{1-\alpha^{t+1}}{1-\alpha} log(\alpha\beta) + \frac{\rho^t\left(1-\left(\frac{\alpha}{\rho}\right)^{t+1}\right)}{1-\left(\frac{\alpha}{\rho}\right)} log(z_0) + \alpha^t log(k_0)$$

$$\hat{\sigma}_t^2 = \frac{1-\alpha^{2t}}{1-\alpha^2}\frac{\sigma^2}{1-\rho^2}$$

esta distribución depende del horizonte de tiempo pero en el límite converge a una distribución estacionaria (ergódica): $lim_{t\to\infty} log(k_t) \sim N\left(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2\right)$ donde:

$$\mu_t = \frac{log(\alpha\beta)}{1-\alpha}$$

$$\hat{\sigma}_t^2 = \frac{\sigma^2}{(1-\alpha^2)(1-\rho^2)}$$

Para efectos prácticos, la mayoría de modelos recursivos tienen que ser solucionados numéricamente y en ese caso los choques agregados son aproximados por cadenas de Markov donde el numero de estados es discreto y finito.

Hasta ahora hemos discutido soluciones al problema neoclásico de crecimiento basadas en sus propiedades recursivas. Existe sin embargo una forma de aproximar la solución a este tipo de problemas que no hace uso de las técnicas de programación dinámica sino que aproxima la solución del modelo tomando como referencia el estado estacionario no-estocástico.

Este tipo de solución es bastante común en la literatura ya que tiene la ventaja de simplificar enormemente el concepto de solución y es mucho más fácil de implementar numéricamente. Gracias a esto permite aumentar el número de estados sin el costo que esto implica cuando solucionamos el modelo usando programación dinámica. La desventaja de aproximar localmente la solución del problema es que en estos casos no podemos hablar de una solución optima global, es decir para cualquier tipo de dinámica, sino local. En modelos donde los choques agregados (o idiosincrásicos si incorporamos agente heterogéneos) son grandes, la solución local puede ser inadecuada ya que la dinámicas de las variables del modelo no están bien aproximadas en el vecindario del estado estacionario.

1.4.1. Aproximaciones lineales al modelo

El concepto de solución en este caso implica que los choques estocásticos alejan las variables de sus valores en el estado estacionario y que por tanto podemos caracterizar la dinámica del modelo mediante una aproximación de Taylor ya sea de primer, segundo o tercer orden, en la proximidad del estado estacionario.

En general la aproximación de primer orden es la más usada, aunque al eliminar la curvatura original de preferencias, por ejemplo, elimina la posibilidad de discutir temas relacionados con el efecto del riesgo en el bienestar o en los precios.

Concretamente el primer paso para este tipo de solución consiste en encontrar el estado estacionario del modelo. Recordemos las ecuaciones que caracterizan el estado estacionario del modelo de crecimiento neoclásico:

$$\bar{k} = \left(\frac{\alpha\beta}{1-\beta(1-\delta)} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$\bar{i} = \delta \left(\frac{\alpha\beta}{1-\beta(1-\delta)} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$\bar{y} = \left(\frac{\alpha\beta}{1-\beta(1-\delta)} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$\bar{c} = \bar{y} - \delta\bar{k}$$

Ahora remplazamos las variables originales del modelo usando desviaciones log-lineales de cada variable frente al estado estacionario. Es decir para cualquier variable x_t del modelo definimos la siguiente transformación:

$$\hat{x}_t = log\left(\frac{x_t}{\bar{x}}\right)$$

Las nuevas variables sombrero (*hat*) son desviaciones log-lineales del estado estacionario y pueden leerse aproximadamente como desviaciones porcentuales del estado estacionario bajo el supuesto de que la dinámica del modelo es en la proximidad de dicho estado. Con base en la definición previa, necesitamos remplazar todas las variables del modelo de esta forma:

$$x_t = \bar{x}e^{\hat{x}_t}$$

En el caso del modelo en cuestión el remplazo implica que la ecuación de Euler y la restricción de presupuesto se convierten en:

$$\bar{c}e^{\hat{c}_t} + \bar{k}e^{\hat{k}_{t+1}} - (1-\delta)\bar{k}e^{\hat{k}_t} = \bar{k}^{\alpha}e^{\hat{z}_t+\alpha\hat{k}_t} \tag{1.18}$$

$$e^{-\hat{c}_t} = \beta E_t\left[e^{-\hat{c}_{t+1}}\left[\alpha\bar{k}^{\alpha-1}e^{\hat{z}_{t+1}+(\alpha-1)\hat{k}_{t+1}} + (1-\delta)\right]\right] \tag{1.19}$$

para completar la descripción del modelo necesitamos la ecuación que describe el proceso estocástico de productividad, que en este caso asumiremos es auto-regresivo de orden uno como definimos en el ejemplo anterior:

$$log(z_{t+1}) = \rho log(z_t) + \varepsilon_{t+1}$$

con $log(\bar{z}) = 0$. Este tipo de proceso es consistente con la idea de log-linearizar el modelo ya que el choque es log-lineal. El siguiente paso en este método de solución es hacer una aproximación de Taylor a las variables del modelo. Dicha aproximación puede ser de distinto ordenes pero lo más sencillo y común es una aproximación de primer orden. Recordemos que para cualquier función $f(x)$ la expansión de Taylor en la proximidad de $\bar{x}$ es:

$$f(x) \approx f(\bar{x}) + \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x}\frac{(x-\bar{x})}{1!}$$

Esto implica que para cualquier variable del modelo $e^{\hat{x}_t}$ la aproximación de primer orden con respecto al estado estacionario $(\hat{x}_t = 0)$ es: $e^{\hat{x}_t} \approx 1 + \hat{x}_t$

Las ecuaciones del modelo en este caso se transforman, después de simplificarlas, en:

$$\bar{c}\hat{c}_t + \bar{k}\hat{k}_{t+1} = \left(\alpha\bar{k}^{\alpha} + (1-\delta)\bar{k}\right)\hat{k}_t + \bar{k}^{\alpha}\hat{z}_t \tag{1.20}$$

$$-\hat{c}_t = -E_t\left[\hat{c}_{t+1}\right] + \alpha\beta\bar{k}^{\alpha-1}(\alpha-1)E_t\left[\hat{k}_{t+1}\right] + \alpha\beta\bar{k}^{\alpha-1}E_t\left[\hat{z}_{t+1}\right] \tag{1.21}$$

$$\hat{z}_{t+1} = \rho\hat{z}_t + \varepsilon_{t+1} \tag{1.22}$$

Existen varias formas de solucionar este sistema de ecuaciones lineales con base en las variables de estado $\{k_t, z_t\}$. En estas notas discutiremos el método de coeficientes indeterminados y una solución más general basada en inversión de matrices una vez el sistema de ecuaciones está en lo que se conoce como representación de estado (*state representation*). Luego discutiremos el software hoy en día más usado para solucionar modelos estocásticos de equilibrio general.

1.4.1.1. Coeficientes Indeterminados

Antes de presentar la representación matricial del sistema, discutamos el método de coeficientes indeterminados utilizado en Campbell (1994).

Supongamos que la solución al sistema de ecuaciones toma la siguiente forma (para simplificar la notación omitiremos los sombreros dado por entendido que todas las variables están definidas como desviaciones del estado estacionario):

$$c_t = \eta_{ck}k_t + \eta_{cz}z_t \tag{1.23}$$

Con la idea de simplificar la notación, escribamos la ecuaciones del modelo de la siguiente forma:

$$\lambda_3 c_t + k_{t+1} = \lambda_2 k_t + \lambda_1 z_t \tag{1.24}$$

$$c_{t+1} - c_t = \lambda_4 k_{t+1} + \lambda_5 z_{t+1} \tag{1.25}$$

$$z_{t+1} = \rho z_t + \varepsilon_{t+1} \tag{1.26}$$

donde $\lambda_1 = \bar{k}^{\alpha-1}$, $\lambda_2 = \alpha\lambda_1 + 1 - \delta$, $\lambda_3 = \lambda_1 - \delta$, $\lambda_4 = \alpha(\alpha-1)\beta\lambda_1$ y $\lambda_5 = \alpha\beta\lambda_1$. Usemos nuestra conjetura sobre consumo (1.23) en la primera ecuación y para definir $c_{t+1} - c_t$:

$$k_{t+1} = (\lambda_2 - \lambda_3\eta_{ck})k_t + (\lambda_1 - \lambda_3\eta_{cz})z_t = \eta_{kk}k_t + \eta_{kz}z_t \tag{1.27}$$

$$c_{t+1} - c_t = \eta_{ck}\Delta k_t + \eta_{ck}\Delta z_t \tag{1.28}$$

Ahora usemos las ecuaciones (1.26), (1.27) y (1.28) en (1.25):

$$\eta_{ck}\Delta k_t + \eta_{ck}\Delta z_t = \lambda_4\eta_{kk}k_t + \lambda_4\eta_{kz}z_t + \lambda_5\rho z_t$$

$$(\eta_{ck}(\eta_{kk} - 1))k_t + (\eta_{kz} + \eta_{ck}(\rho - 1))z_t = (\lambda_4\eta_{kk})k_t + (\lambda_4\eta_{kz} + \lambda_5\rho)z_t$$

Asumiendo que la conjetura inicial es correcta podemos igualar los coeficientes en ambos lados de la ecuación:

$$\eta_{ck}(\lambda_2 - \lambda_3\eta_{ck} - 1) = \lambda_4(\lambda_1 - \lambda_3\eta_{ck}) \tag{1.29}$$

$$\lambda_1 - \lambda_3\eta_{cz} + \eta_{ck}(\rho - 1) = \lambda_4(\lambda_1 - \lambda_3\eta_{cz}) + \lambda_5\rho \tag{1.30}$$

La primera ecuación es cuadrática con respecto a η_{ck} y por tanto tenemos dos soluciones posibles:

$$(\eta_{ck})^2\lambda_3 + (\eta_{ck})(1 - \lambda_2 - \lambda_4\lambda_3) + \lambda_4\lambda_1 = 0$$

$$\eta_{ck} = \frac{-1 + \lambda_2 + \lambda_4\lambda_3 \pm \sqrt{(1 - \lambda_2 - \lambda_4\lambda_3)^2 - 4\lambda_3\lambda_4\lambda_1}}{2\lambda_3}$$

Los valores de los parámetros del modelo (α, β, δ) determinan la raíces que solucionan esta ecuación. En general son tres los casos posibles de la solución:

1. Una única solución estable: cuando un valor de η_{ck} es mayor a uno y la otra raíz de la solución es menor a uno

2. Indeterminada: cuando las dos raíces del polinomio que soluciona η_{ck} son menores a uno

3. Explosiva: cuando las dos raíces son mayor a uno y la dinámica del modelo es explosiva.

El método de coeficientes indeterminados puede ser de gran ayuda en modelos donde el número de variables es pequeño y queremos encontrar algebraicamente como la solución depende de los parámetros del modelo. No obstante, en modelos más grandes este modelo resulta poco práctico. Una forma más eficiente de encontrar la solución es encontrar una representación matricial al modelo y usar inversión de matrices. Son varios los método de manipulación de matrices usados para solucionar problemas dinámicos: Blanchard and Kahn (1980), Uhlig (1995), Sims (2002)y Klein (2000). Acá presentaremos la técnica de Uhlig (1995)que sirve de ilustración de como estos métodos son útiles para encontrar la solución.

1.4.1.2. Algoritmo de Uhlig (1995)

Sea x_{t-1} un vector que contiene todas las variables de estado endógenas (k_t en el modelo básico, m variables en general), y_t la colección del resto de variables endógenas (c_t en nuestro ejemplo, n variables en el caso general) y z_t el vector de variables exógenas, en este caso el choque de productividad. La idea del método de Uhlig (1995) es expresar el modelo en la siguiente forma:

$$Ax_t + Bx_{t-1} + Cy_t + Dz_t = 0$$

$$E_t \left[Fx_{t+1} + Gx_t + Hx_{t-1} + Jy_{t+1} + Ky_t + Lz_{t+1} + Mz_t \right] = 0$$

$$z_{t+1} = Nz_t + \varepsilon_{t+1}$$

$$E_t \varepsilon_{t+1} = 0$$

Donde C es de dimensión $l \times n$, con $l \geq n$ y la matriz N tiene solo eigenvalores estables. En el caso de nuestro modelo las matrices son:

$$\begin{array}{cccc} A=1 & B=-\lambda_2 & C=\lambda_3 & D=-\lambda_1 \\ F=\lambda_4 & G=0 & H=0 & J=-1 \\ K=1 & L=\lambda_5 & M=0 & N=\rho \end{array}$$

La solución a este sistema tiene la forma:

$$x_{t+1} = Px_t + Qz_t$$

$$y_t = Rx_t + Sz_t$$

donde P satisface la siguiente ecuación cuadrática (matricial):

$$\left(F - JC^{-1}A\right)P^2 - \left(JC^{-1}B - G + KC^{-1}A\right)P - KC^{-1}B + H = 0$$

y el equilibrio es estable si y solo si $max\left(abs\left(eig\left(P\right)\right)\right) < 1$. Los valores de estas matrices son elasticidades dada que las variables están definidas en forma logarítmica.

La matriz R satisface:

$$R = C^{-1}\left(AP + B\right)$$

Q se puede encontrar como:

$$N' \otimes \left(F - JC^{-1}A\right) + I_k \otimes \left(JR + FP + G - KC^{-1}A\right) vec\left(Q\right) = vec\left(\left(JC^{-1}D - L\right)N + KC^{-1}D - M\right)$$

y S sastisface:

$$S = -C^{-1}\left(AQ\text{+D}\right)$$

Estas matrices - P, Q,R and S - se pueden encontrar con cualquier programa numérico que permita manipular matrices o usando el *toolkit* especialmente diseñado para Matlab[7].

[7] https://www.wiwi.hu-berlin.de/de/professuren/vwl/wipo/research/MATLAB_Toolkit/version%2041

1.4.1.3. Dynare

Adicionalmente a los algoritmos específicos diseñados para solucionar programas dinámicos, existe un programa especial que permite fácilmente encontrar soluciones lineales de primer, segundo o incluso tercer grado a modelos dinámicos. Este programa especial es Dynare: (http://www.dynare.org). En la página de Dynare se encuentran varios ejemplos y la documentación necesaria para aprender a utilizar dicho programa.

1.5. Modelo Básico de Ciclos Reales

Después de este preámbulo técnico sobre como solucionar modelos dinámicos y estocásticos, podemos explorar el modelo básico de ciclos reales. En este modelo la economía sufre choques estocásticos a la productividad agregada y los agentes deciden no sólo la cantidad óptima de capital a ser invertido en cada periodo, sino también la cantidad de horas dedicas a trabajar en cada periodo. Esta economía es perfectamente competitiva, cada factor de producción recibe en compensación su contribución marginal. Por esta razón el equilibrio descentralizado es igual a la solución del planificador central. Con el fin de discutir el equilibrio descentralizado en más detalle, describamos separadamente el problema de cada uno de los agentes: hogares y firmas.

1.5.1. Hogares

El hogar representativo de la economía tiene las siguientes preferencias sobre la secuencia de consumo de unidades del bien final (c_t) y la desutilidad de trabajar (h_t) número de horas

$$log\left(c_t\right) + \frac{Ah_t^{1+\frac{1}{\varphi}}}{1+\frac{1}{\varphi}}$$

En este tipo de preferencias son separables (*separable preferences*) ya que la utilidad marginal del consumo no depende del número de horas trabajadas. El tiempo es discreto y el horizonte de optimización es infinito $t = \{0, 1, 2..\}$ y los hogares descuenta el futuro a una tasa constante β. El problema del hogar representativo equivale a maximizar la utilidad futura descontada partiendo de la restricción de presupuesto que indica que el consumo más la inversión deben ser iguales a los ingresos labores más la renta generada por el acervo de capital. Nótese que en este modelo los hogares son los dueños del capital y toman las decisiones de inversión de la economía. Dado que no hay fricciones en esta economía, el resultado es igual si asumimos que son las firmas las que deciden cuanto invertir, ya que finalmente los hogares son los dueños de las firmas.

El problema de maximización de los hogares se resume en:

$$max_{\{c_t,k_{t+1},h_t\}_{t=0}^{\infty}} E_o \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(log\left(c_t\right) + \frac{Ah_t^{1+\frac{1}{\varphi}}}{1+\frac{1}{\varphi}} \right) \tag{1.31}$$

sujeto a:

$$c_t + k_{t+1} - \left(1-\delta\right) k_t = w_t h_t + r_t k_t \tag{1.32}$$

Como en el modelo de neoclásico de crecimiento, el capital se deprecia cada periodo en una fracción δ y los hogares deciden cuanto invertir en cada periodo: $i_t = k_{t+1} - \left(1-\delta\right) k_t$. El ingreso labor esta dado por el salario $\left(w_t\right)$, definido en el mercado de trabajo, y la renta del capital $\left(r_t\right)$. La renta neta del capital está dada por $r_t^k = r_t + \delta$.

Las condiciones óptimas de primer-orden que determinan la solución del problema de los hogares son:

$$\frac{1}{c_t} = \lambda_t \tag{1.33}$$

$$Ah_t^{\frac{1}{\varphi}} = \lambda_t w_t \tag{1.34}$$

$$\lambda_t = \beta E_t \left[\lambda_{t+1}\left(r_{t+1} + 1 - \delta\right)\right] \tag{1.35}$$

La ecuación (1.33) define que la utilidad marginal de consumir una unidad adicional del bien final debe ser igual al multiplicador λ_t de la restricción presupuestal. Por tanto el multiplicador de la restricción nos dice en términos de útiles, el valor de relajar -marginalmente- la restricción presupuestal. La ecuación (1.34) es conocida como la condición de trabajo-ocio (labor-leisure) ya que iguala el costo marginal de trabajar, en términos de la utilidad perdida, con el beneficio marginal de trabajar dado por el salario en términos del beneficio en consumo. La tercera condición (1.35) es la condición de Euler que determina que el costo, en utilidad, de invertir (ahorrar) una unidad adicional debe ser igual al valor esperado y descontado del beneficio futuro dado por el retorno del capital.

1.5.2. Firmas

La firma representativa de esta economía opera una función de producción del tipo Cobb-Douglas $y_t = z_t K_t^{\alpha} H_t^{1-\alpha}$ donde y_t es la cantidad de producción de la economía, en otras palabras el Producto Interno Bruto (PIB). La firma representativa maximiza sus beneficios (π_t) tomando como dados el costo de cada insumo de producción, trabajo (H_t) y capital (K_t) sujeta a choques tecnológicos (z_t). Dado que la firma no tiene en este caso ninguna decisión intertemporal, el problema de maximización es estático:

$$max_{k_t,h_t} \pi_t = y_t - w_t H_t - r_t K_t = z_t K_t^{\alpha} H_t^{1-\alpha} - w_t H_t - r_t K_t \tag{1.36}$$

sujeto a :

$$log\left(z_t\right) = \rho log\left(z_{t-1}\right) + \varepsilon_t \tag{1.37}$$

$$\varepsilon_t \sim N\left(0, \sigma^2\right)$$

En este caso la firma decide óptimamente emplear tantas horas de trabajo y tantas unidades de capital que el producto marginal de cada factor de producción sea igual a su contribución marginal:

$$z_t \left(1-\alpha\right) K_t^{\alpha} H_t^{-\alpha} = w_t \tag{1.38}$$

$$z_t \left(\alpha\right) K_t^{\alpha-1} H_t^{1-\alpha} = r_t \tag{1.39}$$

1.5.3. Equilibrio

Un equilibrio en esta economía es una secuencia de precios $\{w_t, r_t\}_{t=0}^{\infty}$ y de choques productivos $\{z_t\}_{t=1}^{\infty}$ con z_0 y k_0 dados, tal que:

1. La decisión de consumo, trabajo y acumulación de capital de los hogares $\{c_t, h_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ sea óptima: (1.33), (1.34) y (1.35)

2. La decisión de demanda de trabajo y capital $\{H_t, K_t\}_{t=0}^{\infty}$ de las firmas sea óptima: (1.38) y (1.39)

3. Los mercados de trabajo y de renta de capital estén en equilibrio:

$$h_t = H_t$$

$$k_t = K_t$$

Es importante recordar que por la ley de Walras, el mercado de bienes finales está también en equilibrio si los mercados de factores están en equilibrio.

1.5.4. Estado Estacionario

El estado estacionario de esta economía puede definirse asumiendo que $\sigma^2 = 0$. En este caso no hay ninguna incertidumbre y el modelo es no-estocástico. Como definimos anteriormente la economía se resume con las siguientes ecuaciones:

$$Ah_t^{1+\frac{1}{\varphi}} = (1-\alpha)\frac{y}{c} \tag{1.40}$$

$$1 = \beta\left[\alpha\frac{y}{k} + 1 - \delta\right] \tag{1.41}$$

$$y = k^{\alpha}h^{1-\alpha} \tag{1.42}$$

$$c + \delta k = y \tag{1.43}$$

Este sistema de ecuaciones se puede resolver analíticamente de tal manera que todas las variables del modelo se pueden resolver como funciones de los parámetros estructurales. La ecuación (1.41) define el ratio capital/PIB como función de parámetros:

$$\frac{k}{y} = \frac{\alpha\beta}{1-\beta(1-\delta)}$$

A partir de esta expresión podemos encontrar el resto de variables:

$$h = \left(\frac{(1-\alpha(1-\beta(1-\delta)))}{1-\beta(1-\delta)-\alpha\beta\delta} \frac{1}{A} \right)^{\frac{\varphi}{\varphi+1}} \tag{1.44}$$

$$y = \left(\frac{\alpha\beta}{1-\beta(1-\delta)} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \left(\frac{(1-\alpha(1-\beta(1-\delta)))}{1-\beta(1-\delta)-\alpha\beta\delta} \frac{1}{A} \right)^{\frac{\varphi}{\varphi+1}} \tag{1.45}$$

$$k = \left(\frac{\alpha\beta}{1-\beta(1-\delta)} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{(1-\alpha(1-\beta(1-\delta)))}{1-\beta(1-\delta)-\alpha\beta\delta} \frac{1}{A} \right)^{\frac{\varphi}{\varphi+1}} \tag{1.46}$$

$$c = \left(\frac{1-\beta(1-\delta)-\alpha\beta\delta}{1-\beta(1-\delta)} \right) \left(\frac{\alpha\beta}{1-\beta(1-\delta)} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \left(\frac{(1-\alpha(1-\beta(1-\delta)))}{1-\beta(1-\delta)-\alpha\beta\delta} \frac{1}{A} \right)^{\frac{\varphi}{\varphi+1}} \tag{1.47}$$

Bajo el supuesto de las economías que observamos tienen a comportarse en el largo plazo como economías sin incertidumbre, o puesto de una manera diferente, si logramos abstraer de las fluctuaciones de corto plazo que producen cambios en el ciclo económico, podemos utilizar datos económicos para establecer algunas propiedades del estado estacionario del modelo. Este ejercicio, la calibración del modelo, implica que podemos inferir los valores de los parámetros estructurales usando el estado estacionario.

1.5.5. Calibración

El primer parámetro que podemos definir es el parámetro A que determina el nivel de desutilidad de trabajo. Si asumimos que en promedio los hogares utilizan 1/3 de las horas para trabajar podemos asumir que dado un nivel de equilibrio de salarios, el parámetro

A es tal que el número de horas en el estado estacionario es 1/3. Esto facilita el cálculo del estado estacionario porque sabiendo que $h = 1/3$ podemos encontrar fácilmente el resto de variables. El otro parámetro que es bastante común en la literatura α que determina la fracción de ingreso de capital en la economía. Usualmente dicha fracción es 1/3 pero puede calibrarse para cualquier país calculando la fracción del PIB que remunera al capital en las cuentas nacionales. El parámetro que determina el descuento de valores futuros, β, es usualmente calibrado para hacer que en el modelo la tasa de interés real del estado estacionario sea igual a $5\,\%$ (este valor cambia dependiendo de la economía y del periodo en cuestión) . En este caso es importante saber la frecuencia, periodicidad, del modelo. Usualmente las cuentas nacionales producen números trimestrales. Con base en esta frecuencia la mayoría de modelos de ciclos reales son calibrados pensado en frecuencia trimestral. Para un modelo trimestral, una tasa de interés real de $5\,\%$, implica una tasa trimestral de 1.25 $\%$ y por tanto un factor de descuento: $\beta = \frac{1}{1+r} = \frac{1}{1+0{,}0125} = 0{,}987$. Para calibrar la depreciación podemos usar el ratio de capital sobre PIB. El valor usado para la depreciación es típicamente $10\,\%$ anual, lo que implica una depreciación trimestral de 2.5 $\%$ ($\delta = 0{,}025$). El único parámetro que no queda determinado en el estado estacionario es φ. Este parametro es la elasticidad de la oferta de trabajo, conocida como la elasticidad de Frisch (*Frisch Elasticity*) y mide el cambio porcentual de horas que los trabajadores están dispuestos a ofrecer frente a un cambio porcentual en salarios, manteniendo la utilidad marginal de consumo constante. Este es uno de los parámetros más controvertidos en la literatura. En general, como veremos, para generar suficiente volatilidad en las horas de trabajo, el modelo necesita una elasticidad relativamente grande, en contraste con la evidencia microeconomía que sugiere que esta elasticidad es bastante baje. Por el momento asumiremos que la elasticidad es unitaria y posteriormente discutiremos como cambia la dinámica del modelo cuando cambiamos este parámetro. Con estos parámetros $(A, \alpha, \beta, \delta, \varphi)$ podemos calcular el estado estacionario del modelo. Falta encontrar los parámetros que determinan los choques de productividad para solucionar el modelo estocástico.

Cuadro 1.1: Modelo Básico de Ciclos Reales

Parámetro	Símbolo	Valor	Objetivo/ Fuente
Fracción Ingreso Capital	α	1/3	Ingreso Capital Cuentas Nacionales
Factor Descuento	β	0.987	Tasa de interés real 5 % anual
Depreciación del Capital	δ	0.025	Depreciación anual capital 10 %
Elasticidad Oferta Trabajo	φ	1	Elasticidad horas frente a salarios
Nivel desutilidad Trabajo	A	7.6926	Horas de Trabajo igual a 1/3
Autocorrelación productividad	ρ	0.95	Residuo de Solow
Volatilidad choques productividad	σ	0.007	Residuo de Solow

Para estimar la serie de tiempo del choque de productividad podemos encontrar el residuo de Solow (*Solow Residual*) de la siguiente manera:

$$log\left(z_t\right) = log\left(y_t\right) - \alpha log\left(k_t\right) - (1-\alpha)\, log\left(h_t\right) \tag{1.48}$$

donde y_t es el PIB (en precios constantes), k_t es el acervo de capital (en precios constantes), h_t es el número de horas agregado de la economía, y $(1-a)$ es la fracción del ingreso nacional en forma de ingreso laboral. Una vez construida la serie de tiempo para el log de los choques de productividad podemos estimar el proceso autoregresivo de primer orden definido en (1.37). En este caso usaremos los parámetros estimador por Cooley and Prescott (1995) para la economía de Estados Unidos:$\rho = 0{,}95, \sigma = 0{,}007$. La tabla (1.1) resume el valor de todos los parámetros y las variables que dichos parámetros pretenden explicar.

Con base en dichos parámetros el valor numérico de las variables en estado estacionario es el siguiente:

Cuadro 1.2: Estado Estacionario Modelo Básico de Ciclos Reales

Variable	Símbolo	Valor Estado Estacionario
PIB	y	0.964443
Consumo	c	0.755997
Capital	k	8.33786
Inversión	i	0.208447
Horas de trabajo	h	0.333333
Nivel de Productividad	z	1

1.5.6. Solución al modelo estocástico

Para solucionar la dinámica de este modelo podemos hacer uso de cualquiera de las técnicas descritas anteriormente: programación dinámica o aproximación lineal. Dado que el modelo no exhibe una depreciación completa del capital, no es posible encontrar de forma analítica la solución al problema de iteración de valor o de política y por tanto la solución solo puede ser numérica. En este caso lo más sencillo es hacer uso de una aproximación lineal y utilizar algún programa que permita encontrar la solución al sistema de matrices. Las ecuaciones del modelo aproximadas log-linealmente al estado estacionario son:

$$\bar{c}\hat{c}_t + \bar{k}\hat{k}_{t+1} = \left(\alpha\bar{k}^{\alpha} + (1-\delta)\bar{k}\right)\hat{k}_t + \bar{k}^{\alpha}\hat{z}_t \tag{1.49}$$

$$\frac{1+\varphi}{\varphi}\hat{h}_t = \hat{y}_t - \hat{c}_t \tag{1.50}$$

$$E_t\left[\hat{c}_{t+1}\right] - \hat{c}_t = (1-\beta(1-\delta))\left(\hat{y}_{t+1} - \hat{k}_{t+1}\right) \tag{1.51}$$

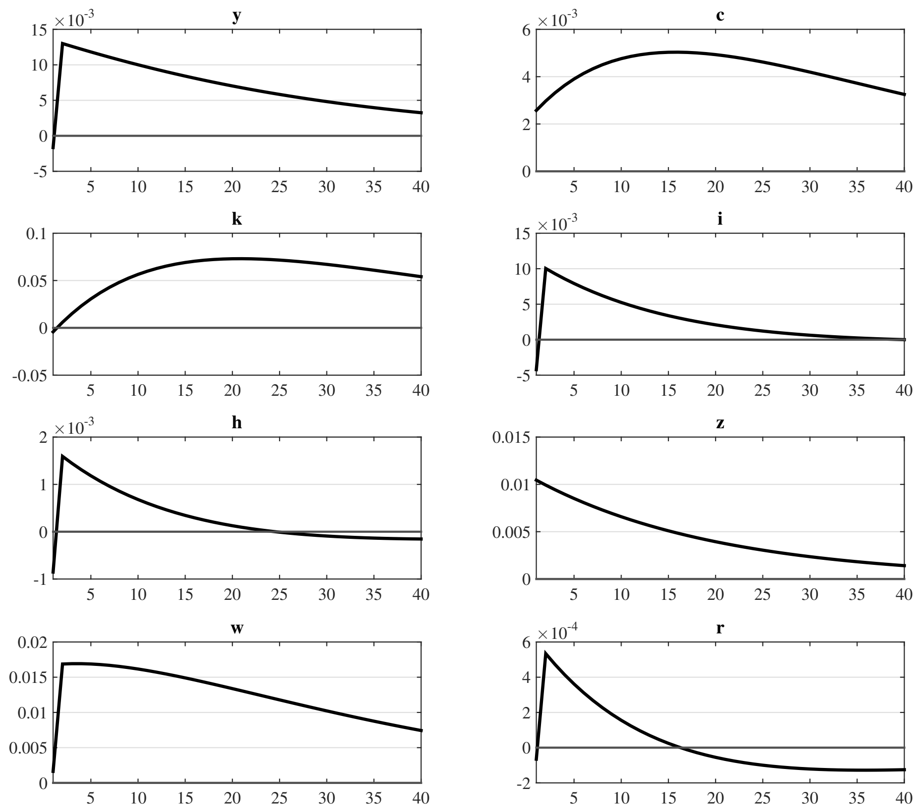
$$\hat{y}_t = \hat{z}_t + \alpha\hat{k}_t + (1-\alpha)\hat{h}_t \tag{1.52}$$

$$\hat{z}_{t+1} = \rho\hat{z}_t + \varepsilon_{t+1} \tag{1.53}$$

1.6. Funciones de Impulso-Respuesta

Una vez encontrada la solución al sistema podemos graficar como las variables del modelo se comportan después de un choque de productividad. Las funciones de impulso respuesta nos muestran la dinámica de las variables frente a un choque (impulso) de una desviación estándar de productividad que se diluye al medio que el tiempo pasa (el choque decae dependiendo del parámetro de autocorrelación). La Figura (1.2) muestra la respuesta de las variables del modelo en desviaciones absolutas del estado estacionario frente un choque de productividad en el periodo 0 igual a la desviación estándar.

Figura 1.2: Impulso Respuesta Modelo Básico de Ciclos Reales



Nota: Solución log-lineal de primer orden (Dynare). Variables en desviaciones absolutas frente al estado estacionario.

La figura de impulso respuesta nos da una idea de la dinámica del modelo. Cuando la economía tiene un choque de productividad positivo, la producción de la economía aumenta. El capital en el momento del choque no cambia dado que esta predeterminado y fue decidido antes del choque. El consumo aumenta, pero aumenta menos que la productividad y la producción dado que dada las preferencias sobre consumo en el tiempo, los hogares invierten (ahorran) parte de la producción adicional para hacer que el aumento de productividad tenga un efecto más duradero en el tiempo. En otras palabras los hogares prefieren suavizar el aumento del consumo en el tiempo invirtiendo parte de la producción adicional en la formación de capital adicional. De esta manera el acervo de capital aumenta en el tiempo y dicho aumento es mucho mas persistente que el choque mismo. Las horas de trabajo aumentan en los periodos que siguen al choque. Esto sugiere que el efecto sustitución (mayores salarios) domina el efecto ingreso y por tanto los hogares deciden tomar ventaja del mayor nivel de productividad para trabajar más. El choque de productividad logra explicar porque las fluctuaciones económicas exhiben una sincronía entre la producción (PIB), el consumo, la inversión y las horas de trabajo. No todos los choques estudiados en la literatura pueden explicar esta correlación positiva que es usualmente observada en los datos.

1.7. Volatilidad y correlaciones de las variables

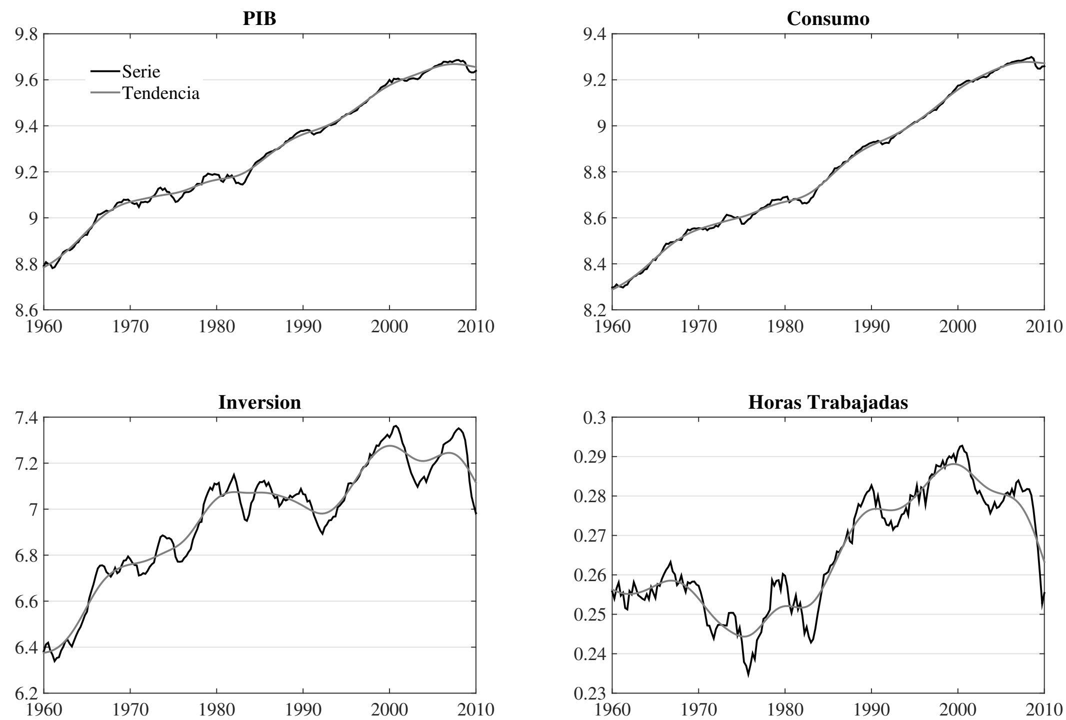
Uno de los puntos importantes de la literatura de los ciclos reales es como comparar la dinámica de las variables simuladas relativos a las variables observadas. Es claro que en los datos las variables macroeconómicas exhiben dinámicas que no solo están relacionadas con los ciclos económicos sino también con tendencias de más largo plazo. Para solucionar este problema la literatura de ciclos reales ha recurrido a diferentes técnicas para aislar fenómenos no relacionados con ciclos económicos en las variables macroeconómicas. Existen varios filtros que permiten descomponer las series en distintivos tipos de frecuencia. El mas usado es el filtro de Hodrick-Prescott. De acuerdo con este filtro (que llamaremos H-P para abreviar), cualquier serie (y_t) puede descomponerse en una serie cíclica (y_t^c) y otra de crecimiento $\left(y_t^g\right)$. El filtro H-P permite escoger el componente de crecimiento $\left(y_t^g\right)$ dado un valor λ, tal que dicha serie minimice la siguiente función de pérdida (*loss function*):

$$\sum_{t=1}^{T}(y_t^c)^2+\lambda\sum_{t=1}^{T}\left[\left(y_{t+1}^g-y_t^g\right)-\left(y_t^g-y_{t-1}^g\right)\right]^2$$

Si λ toma un valor bajo, digamos cero, entonces el componente cíclico es cero y el componente de crecimiento es idéntico a la serie original. En el caso en que $\lambda\to\infty$ cualquier desviación del componente de crecimiento es penalizada y por ende la serie de crecimiento es una tendencia lineal. La literatura usualmente toma $\lambda=1,600$. Figura ()

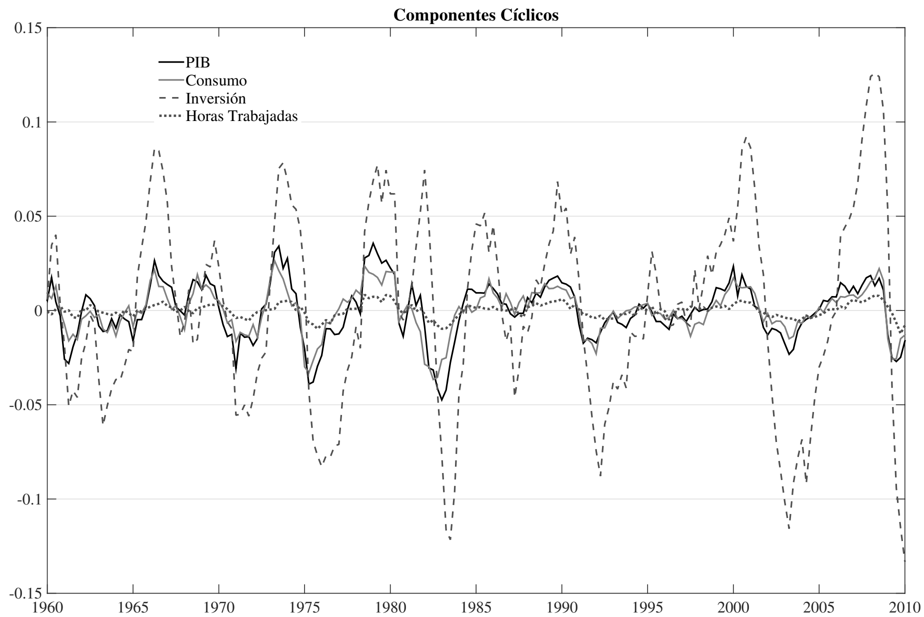
compara el logaritmo de las variables macroeconómicas de Estados Unidos en términos per capita con respecto a la tendencia calculada usando el filtro H-P con $\lambda = 1,600$.

Figura 1.3: Ciclos Reales en Estados Unidos 1960-2010



Nota: Todas las variables son logaritmos de las variables per capita en dólares constantes de 2005, con excepción de las horas trabajadas. Fuente: BEA http://www.bea.gov/national/index.htm#gdp y https://sites.google.com/site/simonacociuba/research.

Figura 1.4: Componente Cíclicos Estados Unidos 1960-2010



Nota: Desviaciones porcentuales de cada variable respecto a su tendencia.

Ahora podemos comparar las variables simuladas del modelo con las series filtradas y evaluar que tan bueno es el modelo en la descripción de las fluctuaciones económicas, en este caso de Estados Unidos. El cuadro (1.3) muestra estadísticas de segundo momentos, volatilidad y correlaciones, de las variables del modelo y de los datos con base en Cooley and Prescott (1995).

Cuadro 1.3: Ciclos Reales: Modelo vs Datos

Estadístico	Símbolo	Datos	Modelo
Volatilidad PIB	σ_y	1.72	1.82
Volatilidad Consumo	σ_c	1.27	0.55
Volatilidad Inversión	σ_i	8.24	7.10
Volatilidad Trabajo	σ_h	1.59	0.73
Correlación PIB, Consumo	$\rho_{y,c}$	0.83	0.73
Correlación PIB, Inversión	$\rho_{y,i}$	0.91	0.98
Correlación PIB, Trabajo	$\rho_{y,h}$	0.82	0.96

En general el modelo hace un buen trabajo replicando la volatilidad y correlaciones de los datos. De hecho, la capacidad del modelo de explicar la estructura de correlaciones de las fluctuaciones de las variables agregadas fue lo que lo convirtió en el modelo de referencia de ciclos económicos. No obstante el éxito, el modelo tiene ciertas limitaciones y problemas que han generado modificaciones a la versión básica en varios frentes. Un aspecto importante tiene que ver con la volatilidad relativa del empleo frente el producto. Antes de discutir el mercado de trabajo con más detalle, discutamos con incluir una senda de crecimiento constante en el modelo y que tipo de preferencias o tecnologías son compatible con dicha senda.

1.8. Senda Constante de Crecimiento (*Balanced Growth Path*)

Si bien el filtro H-P admite fluctuaciones de largo plazo en la tendencia de las variables, la mayoría de las variables macroeconómicas exhiben una senda de crecimiento constante en el largo plazo, y las fluctuaciones económicas pueden entenderse como desviaciones temporales de esa senda de crecimiento. Podemos entonces proponer un modelo donde el producto, el consumo y la inversión no sean variables estacionarias sino que crecen a una tasa determinística constante. Esto implica remover la tendencia de las series del modelo (*de-trend the model*) y re-definir el modelo para dichas variables considerando que el número de horas trabajadas no tienen ninguna tendencia.

Es posible definir una senda de crecimiento constante definiendo las variables de la siguiente manera:

$$y_t = (1+\gamma)^t \tilde{y}_t$$

$$c_t = (1+\gamma)^t \tilde{c}_t$$

$$k_t = (1+\gamma)^t \tilde{k}_t$$

$$z_t = (1+\gamma)^{t(1-\alpha)} \tilde{z}_t$$

donde γ es la tasa de crecimiento constante del producto. En este caso podemos reescribir el modelo como:

$$max_{\{c_t, k_{t+1}, h_t\}_{t=0}^{\infty}} E_o \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(log\left(\tilde{c}_t\right) + \frac{Ah_t^{1+\frac{1}{\varphi}}}{1+\frac{1}{\varphi}} \right) + t\beta^t log\left(1+\gamma\right) \tag{1.54}$$

sujeto a:

$$\tilde{c}_t + (1+\gamma)\tilde{k}_{t+1} - (1-\delta)\tilde{k}_t = \tilde{y}_t \tag{1.55}$$

$$\tilde{y}_t = \tilde{z}_t \tilde{k}_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha} \tag{1.56}$$

$$\tilde{z}_{t+1} = \rho \tilde{z}_t + \varepsilon_{t+1}$$

Las nuevas variables del modelo no exhiben ningún crecimiento, pero las variables originales crecen a una tasa constante. La calibración del modelo debe incluir el nuevo parámetro γ que aparece en la ecuación de Euler de capital:

$$\frac{(1+\gamma)}{\tilde{c}_t} = \beta E_t \left[\frac{1}{\tilde{c}_{t+1}} \left(\alpha \frac{\tilde{y}_{t+1}}{\tilde{k}_{t+1}} + 1 - \delta \right) \right]$$

La introducción de crecimiento modifica los valores de la calibración pero no tiene un efecto importante en la dinámica del modelo. Las versiones iniciales del modelo de ciclos reales como Cooley and Prescott (1995) incluían una calibración de este tipo, pero en general muchas versiones del modelo omiten la dimensión de crecimiento determinístico. Por dicha razón en lo que resta, no centraremos en la versión del modelo ignorando el parámetro γ de crecimiento.

Ejercicios

Ejercicio 1. Brock-Mirman (1972) con productividad estocástica

Considere el problema de Brock y Mirman (1972) donde un planificador central busca maximizar la utilidad esperada descontada de los agentes, escogiendo la senda de consumo y capital $\{c_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$, sujeto a una restricción de recursos.

$$\max_{\{c_t,k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} U = \mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln C_t \tag{1.57}$$

$$c_t + k_{t+1} = Z_t k_t^{\alpha} \; \forall t \tag{1.58}$$

Donde $\alpha \in (0,1)$, $\beta \in (0,1)$ y k_0 está dado. Z_t es una variable aleatoria que representa el nivel de productividad en la economía, y sigue una distribución log-normal. Esto es, $\ln Z_t \sim N(\mu, \sigma^2)$, lo que implica lo siguiente:

$$\mathbb{E}(Z_t) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \tag{1.59}$$

$$V(Z_t) = \left(e^{\sigma^2} - 1\right)\left(e^{2\mu+\sigma^2}\right) \tag{1.60}$$

Donde $\mathbb{E}$ corresponde al operador de valor esperado, y V denota la varianza.

1. Utilizando elementos de programación dinámica, plantee el problema en forma recursiva. Identifique las variables de control y las variables de estado.

2. Utilizando iteración de la función valor, encuentre la solución del modelo. Esto es, halle expresiones para las funciones de política de la siguiente forma: $\mathbf{H} = f(\mathbf{U})$,donde $\mathbf{H}$ denota las variables de control, y $\mathbf{U}$ las variables de estado.

3. Basado en (1.59), (1.60) y la solución del modelo, encuentre la media y la varianza de k', donde k' corresponde al stock de capital del siguiente periodo.

4. Encuentre la distribución estacionaria de k´cuando el horizonte de tiempo es arbitrariamente largo.

Ejercicio 2. Levhari and Srinivasan (1969)

Considere un agente representativo con la siguiente función de utilidad $u(c_t) = \frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma}$ donde $\sigma > 0$ representa la función de utilidad. Este agente decide su consumo e inversión con base en el nivel de activos que tiene de la siguiente manera: $c_t + i_t = a_t$. El retorno a la inversión R_t es estocástico (independientemente e idénticamente distribuido en el tiempo) de tal manera que los activos futuros están determinados por: $a_{t+1} = R_t i_t$ con a_0 dado. El agente representativo decide su consumo antes de observar la realización del retorno estocástico R_t. Asuma que $E_t\left(R_t^{1-\sigma}\right) < \frac{1}{\beta}$

1. Plantee el problema recursivo del agente con base en la(s) variable(s) del estado del modelo.

2. Use una conjetura para la función de valor y encuentre mediante coeficientes indeterminados los parámetros de dicha función. (ayuda:haga el primer paso de una iteración de función de valor para hacer una conjetura informada).

3. Encuentre la función de política y exprese el consumo como función de la(s) variable(s) de estado.

4. Explique porqué es necesario asumir que $E_t\left(R_t^{1-\sigma}\right) < \frac{1}{\beta}$.

Ejercicio 3. Ejemplo modelo de ciclos reales (RBC)

Considere el siguiente modelo: un hogar representativo maximiza su utilidad esperada descontada escogiendo la senda óptima de consumo, horas trabajadas e inversión, $\{c_t, n_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ sujeto a la restricción presupuestal:

$$\max_{\{c_t, n_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} U = \mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{n^{1+\eta}}{1+\eta}\right]$$

sujeto a:

$$w_t n_t + r_t k_t = c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t$$

Donde w_t es el salario que recibe el hogar por cada unidad trabajada, r_t es la tasa de retorno del capital, y $\delta \in (0,1)$, $\beta \in (0,1)$, $\eta > 1$ y $\sigma > 1$ son parámetros. Por otro lado, las firmas buscan maximizar sus beneficios, escogiendo cada periodo la cantidad de horas de trabajo y unidades de capital que contrata, n_t y k_t, sujeto a una tecnología de producción Cobb-Douglas:

$$\max_{k_t, n_t} \pi_t = y_t - w_t n_t - r_t k_t$$

sujeto a:

$$y_t = Z_t k_t^{\alpha} n_t^{1-\alpha}$$

Donde y_t es el nivel de producción de la firma, $\alpha \in (0,1)$ y Z_t es un choque de productividad que sigue un proceso AR(1) con estado estacionario $\bar{Z}$:

$$Z_t = Z_{t-1}^{\rho} \bar{Z}^{1-\rho} \exp(\varepsilon_t^z)$$

donde $\rho \in (0,1)$ es el parámetro de persistencia del choque, y ε_t^z es una variable aleatoria que sigue un proceso ruido blanco.

1. Caracterice la solución óptima al problema del hogar. Brinde una intuición de las condiciones de primer orden.

2. Caracterice la solución óptima al problema de la firma. Brinde una intuición de las condiciones de primer orden.

3. Defina el equilibrio competitivo de esta economía.

4. Encuentre el estado estacionario del modelo.

5. Log-linearice las ecuaciones del modelo.

Capítulo 2

Mercado Labor

Uno de los temas más discutidos en la literatura de ciclos reales es el de la volatilidad de las horas de trabajo en el modelo relativo a los datos. La baja volatilidad del modelo es resultado de la calibración usada, de las preferencias que incorporan el ocio en la función de utilidad, así como la forma como el mercado de trabajo es modelado. Con la idea de discutir en más detalle este tema, empecemos por analizar el efecto de cambios en la calibración del modelo. El parámetro que gobierna el cambio de las horas trabajadas frente a cambios en el salario es la elasticidad de Frisch φ. En la calibración presentada en la tabla 1.1 escogimos este parámetro sin ninguna restricción. La siguiente tabla presenta la volatilidad relativa de las horas de trabajo relativo al producto usando distintos valores de φ.

Cuadro 2.1: Volatilidad Horas de Trabajo relativo al Producto

	Elasticidad de Frisch φ					
	0.5	1	2	5	10	15
Volatilidad Horas Relativo al Producto (σ_h/σ_y)	0.26	0.33	0.44	0.58	0.77	0.97

Para alcanzar valores cercanos a los de la data, tenemos que asumir valores relativamente altos de la elasticidad de Frisch. Esto en si mismo no es un problema, pero estos valores son muchos más altos que los reportados por trabajos empíricos que miden la elasticidad de las horas de trabajo frente a salarios. Chetty et al. (2011) recopila los trabajos más importantes de esta discusión y la tensión entre los valores bajos de la elasticidad micro y los altos valores requeridos por los modelos macro. Es importante aclarar que el modelo de ciclos reales abstrae de muchas consideraciones importantes como lo son el ciclo de vida laboral, las fricciones financieras, la heterogeneidad en salarios, consumo y horas de diferentes hogares, la decisión dentro del hogar de tener uno o dos adultos participando en el mercado laboral, la indivisibilidad del trabajo y las fricciones en el mercado laboral. Un estudio exhaustivo del mercado de trabajo requiere una revisión de todos estos temas pero en esta capitulo nos concretaremos en los últimos dos: la indivisibilidad del trabajo y las fricciones del mercado laboral.

En el tema de indivisibilidad del trabajo, los artículos de referencia son Hansen (1985) y Rogerson (1988). En el modelo básico de ciclos reales las horas de trabajo son divisibles: el agente representativo siempre puede decidir trabajar en el margen una cantidad infinitamente arbitraria de horas. En los datos sabemos que la mayoría de los cambios en las horas agregadas de trabajo en la economía corresponden a cambios en el número de personas trabajando y no a cambios en las horas de las personas que ya trabajan. En otras palabras, la mayor parte de los cambios en las horas de trabajo se deben al margen extensivo (más o menos trabajadores) que al margen intensivo (más o menos horas extras por trabajador). Como reporta Cooley and Prescott (1995) la volatilidad de empleo (número de empleados) en Estados Unidos es 1.41, 89 % de la volatilidad de las horas de trabajo.

2.1. Trabajo Indivisible

Los trabajos de Hansen (1985) y Rogerson (1988) parten de la base de que el trabajo es indivisible, es decir, los trabajadores deciden si participar o no del mercado laboral tomando el salario y las horas de trabajo como dados. En este modelo los trabajadores son homogéneos y el numero total de trabajadores es uno (*unit measure*). Al comienzo de cada periodo cada trabajador participar en una lotería que le asigna su condición de trabajador o desempleado. Con probabilidad «n» cada trabajador tiene la oportunidad de trabajar H números de horas. Por la ley de los grandes números la tasa de empleo de la economía es n y la tasa de desempleo es $1-n$. Un elemento importante de este modelo tiene que ver con el riesgo compartido (*risk sharing*) entre los trabajadores y desempleados. Dado que la restricción presupuestal es única, el nivel de consumo de los dos tipos, trabajadores y desempleados, es igual. Por ende a pesar de la incertidumbre individual generada por la lotería al final el riesgo es agregado.

En este modelo las preferencias sobre consumo y ocio están representadas por la siguiente función:

$$u(c,h) = log(c_t) + Alog(1-h_t)$$

La condición de perfecto aseguramiento implica que el consumo de los trabajadores es el mismo que el consumo de los desempleados $(c_{n_t} = c_{1-n,t} = c_t)$. Esto sumado a que las horas trabajadas son fijas implican que la utilidad total del hogar es:

$$u(c,h) = n_t log(c_{n,t}) + (1-n_t) log(c_{1-n,t}) + An_t log(1-H) = log(c_t) - \phi l_t$$

donde

$$\phi = \frac{-Alog(1-H)}{H}$$

$$l_t = H \cdot n_t$$

En este caso las preferencias del hogar representativo exhiben des-utilidad lineal en el número de trabajadores de la economía. La restricción presupuestal es:

$$c_t + k_{t+1} - (1-\delta) k_t = w_t l_t + r_t k_t$$

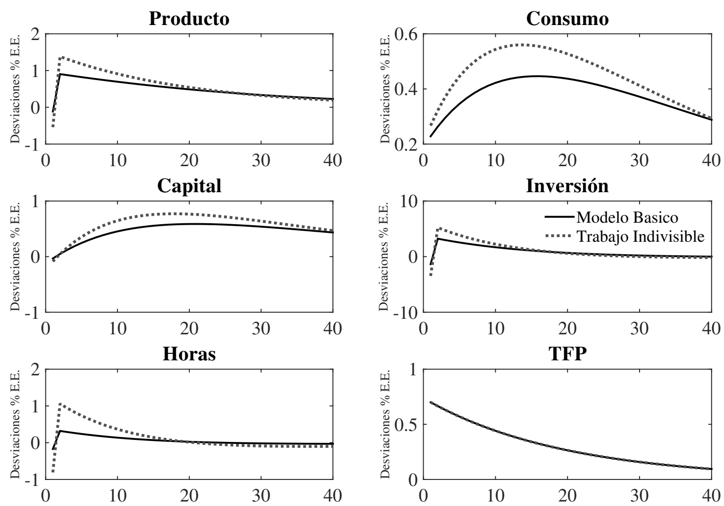
Por ende las ecuaciones que caracterizan la solución óptima al problema de los hogares son:

$$\phi = \frac{w_t}{c_t} \tag{2.1}$$

$$\frac{1}{c_t} = \beta E_t \left[\frac{1}{c_{t+1}} (r_{t+1} + 1 - \delta) \right] \tag{2.2}$$

En este caso la condición de trabajo-ocio no depende del número de horas haciendo que la oferta laboral agregada sea completamente elástica. El parámetro ϕ se puede calibrar para que en el estado estacionario el tiempo de trabajo sea 1/3. La figura 2.1 presenta la respuesta de las variables del modelo de trabajo indivisible frente a un choque de productividad agregada en comparación con la respuesta del modelo básico con una elasticidad de Frisch igual a uno. Como puede verse el modelo de trabajo indivisible tiene más volatilidad, en particular en la cantidad agregada de horas de trabajo (empleo). La volatilidad relativa de las horas de trabajo relativo al producto aumenta de 0.33 en el modelo básico a 0.73 en el modelo de trabajo indivisible.

Figura 2.1: Modelo Básico frente Modelo Trabajo Indivisible (FIR)



Nota: Funciones Impulso Respuesta (FIR) frente a un choque de una desviación estándar de la productividad total de factores (TFP). Las variables están en desviaciones porcentuales frente al estado estacionario.

La introducción de la indivisibilidad de trabajo mejora sustancialmente la capacidad del modelo de reproducir los segundos momentos (volatilidades) de las variables macroeconómicas más importantes. No obstante, esta especificación no esta libre de criticas. En particular el supuesto de que independientemente del resultado de la lotería de trabajo el consumo es idéntico, va en contra de amplia evidencia. Adicionalmente, dado que el modelo abstrae de cualquier fricción, los movimientos del mercado del trabajo son eficientes (en el sentido Pareto) y no hay lugar al desempleo. Una modificación importante para enriquecer la discusión del mercado laboral es la introducción de rigideces y fricciones en el mercado laboral. La más utilizada es la fricción de búsqueda y encuentro de propuestas laborales en lo que es hoy el modelo canónico de Diamond-Mortensen-Pissarides (DMP) inicialmente propuesto en Diamond (1982), Mortensen (1982), Pissarides (1985) y Mortensen and Pissarides (1994).

2.2. El Modelo Diamond-Mortensen-Pissarides (DMP)

Los modelos de búsqueda y encuentro (o emparejamiento) (*search and matching*) son bastante populares en el contexto de mercado laboral o modelos monetarios. En estos modelos los agentes económicos no participan de un mercado centralizado sino que se encuentran bilateralmente para realizar alguna transacción. En el caso del mercado laboral asumimos que los trabajadores buscan y se encuentran (emparejan) con ofertas laborales con fines productivos. Una descripción del modelo necesita caracterizar como se encuentran y se forman las parejas, en este caso entre trabajadores y vacantes laborales. Adicionalmente el modelo tiene que especificar como una vez la producción tiene lugar el producto se divide entre el trabajador y la firma. Estos dos elementos adicionales, una función de emparejamiento y un protocolo de negociación, ausentes en el modelo de mercados centralizados, son piezas claves del modelo DMP.

En estas notas expondremos primero la versión inicial del DMP en tiempo continuo, sin capital, con agentes que son neutrales al riesgo y con una función de producción lineal. Posteriormente seguiremos la adaptación del modelo DMP de Shimer (2010) que permite un tratamiento del tema en el contexto de un modelo general cercano al modelo de ciclos reales.

2.2.1. Descripción básica

El tiempo es continuo y hay una medida unitaria de trabajadores idénticos. Hay un bien final de consumo (numerario) del cual los agentes derivan utilidad. La tasa de descuento es constante e igual a r. El producto de esta economía es resultado únicamente del uso del insumo de trabajo, no hay capital. La producción ocurre una vez hay un emparejamiento entre trabajador y una oferta laboral. Cada pareja consiste de un trabajador y un trabajo.

Cuando el trabajador se encuentra con el trabajo (vacante) se produce un flujo de consumo de bien final igual a Z.

Cada periodo la economía arranca con un número (medida) U de trabajadores desempleados y una medida E de trabajadores empleados (trabajos o firmas). Cada periodo un número de trabajos terminan definitivamente, hay una separación de los trabajadores con su trabajo a una tasa x que es determinística y exógena. Las firmas postulan un número V de vacantes cada periodo, pagando un costo c. Los trabajadores y las vacantes se encuentran de una manera aleatoria. Una vez se forma una pareja trabajador-vacante, el trabajador y la firma negocian sobre el beneficio que crea la pareja. Esto proceso continua cada periodo hasta que la separación exógena ocurre.

El beneficio de una firma que contrata a un trabajador a un salario w es:

$$\pi = Z - w - c \tag{2.3}$$

La función de emparejamiento indica cuantas parejas se forman o en otras palabras cuantos trabajadores encuentran trabajo en cada periodo. El número de parejas que se forman es:

$$M(U,V) = \omega U^{\phi} V^{1-\phi} \tag{2.4}$$

Esta función señala que el número de potenciales parejas aumenta en la medida que hay más trabajadores desempleados y más vacantes. El parámetro ω indica la productividad (eficiencia) de la tecnología de emparejamiento de la economía. El flujo de trabajadores sin trabajo es:

$$\dot{U} = xE - M(U,V) \tag{2.5}$$

Análogamente el flujo de empleo está dado por:

$$\dot{E} = M(U,V) - xE \tag{2.6}$$

En estado estacionario el flujo es constante y por ende:

$$xE = M(U,V) \tag{2.7}$$

2.2.2. Valor de ser empleado

El valor actual de estar empleado es igual al salario actual más el valor presente neto (descontado) de continuar en un empleo el siguiente periodo o el valor de convertirse un desempleado[1].

$$V_E = \frac{w + xV_u + (1-x)V_E}{1+r} \tag{2.8}$$

El trabajador recibe un flojo igual al salario w y con probabilidad x pasa de recibir el flujo de ser empleado a ser desempleado $(V_U - V_E)$:

$$rV_E = w + x(V_U - V_E) \tag{2.9}$$

2.2.3. Valor de estar desempleado

El valor actual de estar desempleado es igual al desempleo de seguro, en este caso supondremos igual a cero, más el valor presente neto (descontado) de continuar como desempleado el siguiente periodo o el valor de convertirse un empleado:

$$rV_u = f \cdot (V_E - V_U) \tag{2.10}$$

donde f es la probabilidad de conseguir una oferta laboral, la tasa de encuentro de empleo (*job findig rate*):

$$f = \frac{M(U,V)}{U} = \omega\left(\frac{V}{U}\right)^{1-\phi} = \omega(\theta)^{1-\phi} \tag{2.11}$$

y θ es el ratio de vacantes-desempleados ($\theta = V/U$) e indica que tan «apretado» (*tigthten*) esta el mercado laboral. Si θ es alto hay muchas vacantes en el mercado laboral relativo al número de desempleados por tanto la probabilidad de conseguir una oferta es alta.

[1] La derivación de esta ecuación se encuentra en el apéndice del capítulo

Por el contrario un bajo θ supone un mercado laboral apretado donde la probabilidad de conseguir empleo es baja. En este modelo el ratio de vacantes-desempleo es endógena y determina la dinámica del resto de variables laborales.

2.2.4. Valor de una vacante sin llenar

Una vacante sin llenar tiene un costo (flujo) c y con probabilidad q la vacante se llena:

$$rV_V = -c + q \cdot (V_F - V_V) \tag{2.12}$$

$$q = \frac{M(U,V)}{V} = \omega \left(\frac{U}{V}\right)^{\phi} = \omega (\theta)^{-\phi} \tag{2.13}$$

2.2.5. Valor de una vacante llena

Una vacante llena genera un beneficio (flujo) neto igual a la producción menos el salario y con probabilidad x desaparece.

$$rV_F = Z - w - c + x(V_V - V_F) \tag{2.14}$$

2.2.6. Equilibrio Estacionario

Un equilibrio estacionario incluye valores de $\{V_E, V_U, V_F, V_V, E, U, w\}$ tal que el mercado de trabajo este en equilibrio: $1 = E + U$, el número de empleados es constante: $M(U,V) = xE$, crear una vacante genera beneficio cero, dado libre entrada al mercado: $V_V = 0$ y los salarios están determinados.

2.2.7. Determinación de Salarios: Negociación de Nash

Un punto importante del modelo tiene que ver con la negociación de salarios. En principio, cualquier tipo de protocolo de negociación es aceptable. Una vez el trabajador consigue un empleo el producto creado como resultado de este emparejamiento puede ser divido de múltiples maneras entre los dos agentes. Cada parte de la negociación usa en el protocolo de división del beneficio el valor de la opción alternativa. Un valor positivo de seguro de desempleo, por ejemplo, aumenta el valor de desempleo y el poder de negociación del trabajador.

El modelo original DMP como casi todo la literatura asume que el beneficio de la pareja empleado-trabajo se divide de acuerdo con un protocolo de negociación de Nash. En este caso el salario es determinado de la siguiente manera:

$$w = argmax_w \left(V_E - V_U\right)^{\sigma} \left(V_F - V_V\right)^{1-\sigma}$$

donde σ representa el poder de negociación de los trabajadores. La solución a la negociación de Nash indica que los trabajadores deben quedarse con una fracción σ del beneficio total asociado con la producción de cada puesto de trabajo:

$$V_E - V_U = \sigma \left(V_E + V_F - V_U - V_V\right) \tag{2.15}$$

Si suponemos que $\sigma = \frac{1}{2}$ el beneficio es dividido en partes iguales entre el trabajador y la firma:

$$V_E - V_U = V_F - V_V \tag{2.16}$$

2.2.8. Solución

Dado los parámetros del modelo tenemos cuatro ecuaciones para solucionar las 4 funciones relevantes del modelo $\{V_E, V_U, V_F, V_V\}$:

$$rV_E = w + x\left(V_U - V_E\right)$$

$$rV_u = f\left(V_E - V_U\right)$$

$$rV_F = Z - w - c + x\left(V_V - V_F\right)$$

$$rV_V = -c + q\left(V_F - V_V\right)$$

La solución implica que:

$$V_E - V_U = \frac{w}{r+f+x} \tag{2.17}$$

$$V_F - V_V = \frac{Z-w}{r+q+x} \tag{2.18}$$

Usando la solución de Nash podemos resolver para el salario:

$$w = \frac{Z(r+f+x)}{q+f+2r+2x} \tag{2.19}$$

Cuando $q = f$ el salario es la mitad del producto resultante de cada pareja y por tanto el beneficio (*surplus*) se divide equitativamente entre trabajadores y firmas.

2.2.9. Relación entre empleo y la probabilidad de ofertas y vacantes

Analicemos algunas de las predicciones e implicaciones del modelo usando las ecuaciones de solución. La probabilidad de conseguir una oferta laboral, f, puede escribirse como función del nivel de empleo de la economía:

$$f = \frac{xE}{1-E}$$

de esta expresión tenemos que $\frac{\partial f}{\partial E} = \frac{x(1-E)+xE}{(1-E)^2} = \frac{x}{(1-E)^2} > 0$, por tanto la probabilidad de conseguir empleo es creciente en el nivel agregado de empleo de la economía. En otras palabras la probabilidad de encontrar empleo es pro-cíclica.

Usando la ecuación (2.13) podemos encontrar una expresión que relaciona el número de vacantes con el nivel de empleo de la economía:

$$V = \left(\frac{xE}{\omega(1-E)^{\phi}}\right)^{\frac{1}{1-\phi}}$$

con esta expresión podemos encontrar la relación entra la probabilidad de llenar una vacante, q, y el nivel de empleo:

$$q = \omega^{\frac{1}{1-\phi}} (1-E)^{\frac{\phi}{1-\phi}} (xE)^{-\frac{\phi}{1-\phi}}$$

puede verificarse que $\frac{\partial q}{\partial E} < 0$, lo que implica que en la medida que la economía tiene mayor nivel de empleo es más difícil llenar una nueva vacante.

2.2.10. Equilibrio

Este modelo tiene un único equilibrio gracias al supuesto de que la competencia lleva a las empresas a generar nuevas ofertas de trabajo hasta el punto que el valor de una vacante es igual a cero en valor presente. Esta condición conocida como condición de libre entrada (*free entry*) permite encontrar el equilibrio del modelo:

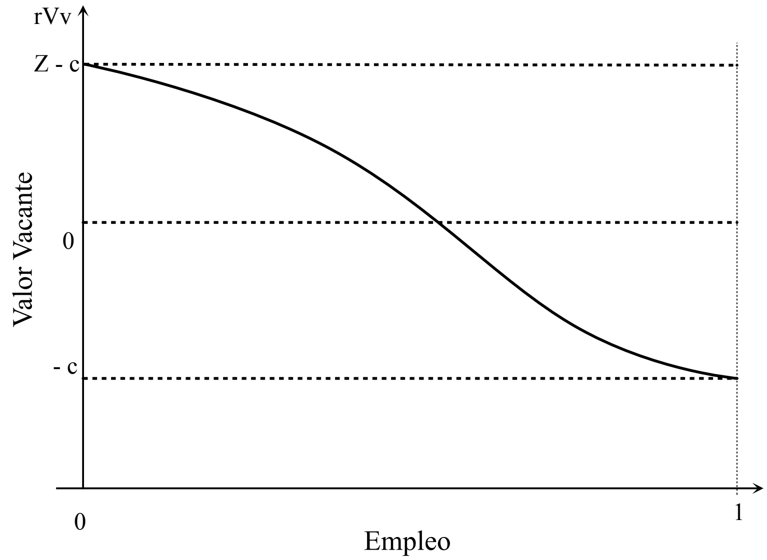
$$rV_V = -c + q(V_F - V_V) = 0$$

Usando las ecuaciones (2.18) y (2.19) encontramos la siguiente expresión:

$$rV_V = -c + \frac{q(E)Z}{q(E) + f(E) + 2r + 2x} = 0$$

Esta expresión es decreciente en el nivel de empleo y tiene único equilibrio que hace que el valor de entrada de la firma sea cero. La figura (2.2) ilustra la existencia única del equilibrio del modelo.

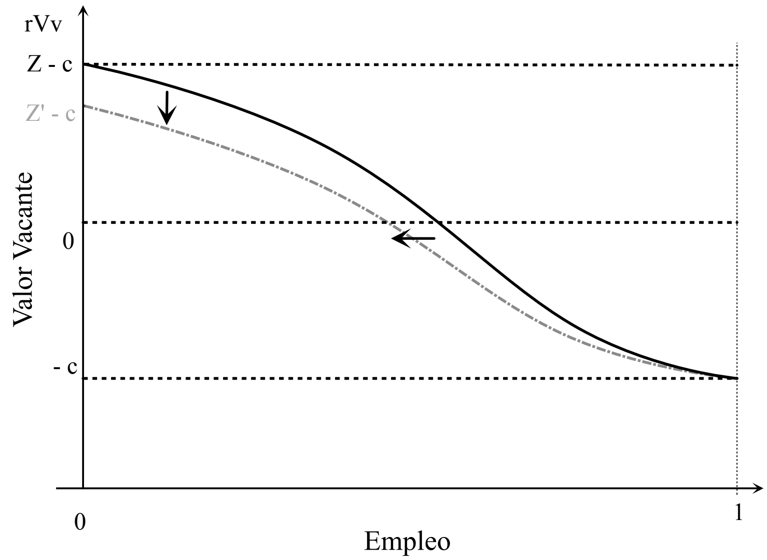
Figura 2.2: Ilustración Equilibrio Modelo DMP



2.2.11. Choques de productividad

Cambios en el nivel de productividad tienen efectos en las variables del mercado laboral ya que modifican los incentivos a crear vacantes y los beneficios asociados con la creación de empleo. Una reducción de la productividad laboral manteniendo constante el costo de crear vacantes, genera un aumento del desempleo y una disminución del empleo de la economía. Gráficamente, la figura (2.3) ilustra el resultado de una caída en el nivel de productividad.

Figura 2.3: Reducción Productividad Laboral en el Modelo DMP



La reducción de empleo en la economía es resultado de la reducción relativa del beneficio asociado con la creación de empleo, determinado por la productividad laboral, frente al costo de crear nuevas vacantes. En este caso el número de vacantes nuevas se reduce lo cual implica una reducción en la probabilidad de conseguir trabajo y por ende del empleo agregado. El modelo implica una relación negativa entre el número de vacantes y la tasa de desempleo (curva de Beveridge) que ha sido documentada en muchos países.

2.2.12. Predicciones Cuantitativas

El modelo DMP introduce de una forma estilizada y simple el concepto de desempleo dentro del marco de modelos de equilibrio general dinámico. No obstante, la versión básica del modelo es incapaz de reproducir las fluctuaciones de desempleo dado los movimientos observados en la productividad agregada medida como el residuo de Solow como demuestra el trabajo de Shimer (2005). Este trabajo ha generado una agenda muy amplia que busca reconciliar las predicciones del modelo con los datos. Antes de discutir algunas de las modificaciones propuestas la siguiente sección explora el resultado de Shimer (2010) sobre la neutralidad de choques de productividad en la tasa de desempleo en el contexto de un modelo de equilibrio general.

2.3. Fricciones de búsqueda en un modelo de ciclos reales sin capital

Existen varios trabajos que presentan el modelo de fricciones de búsqueda en el contexto de un modelo de ciclos reales. Primero presentaremos un modelo sin capital siguiendo a Shimer (2010) donde la productividad agregada no tiene efecto en el empleo de equilibrio
.

2.3.1. Firmas

Una firma representativa emplea una medida n de trabajadores. La firma tiene acceso a dos tecnologías: una tecnología para producir bienes de consumo y otra para generar nuevos puestos de trabajo usando reclutadores. La primera tecnología es del tipo Cobb-Douglas y la firma produce z unidades del bien final por cada trabajador activo en el periodo t. Cada persona encargada de reclutar es capaz de generar $\mu(\theta_t)$ nuevos puestos laborales. Por ende, si v_t es el número de reclutadores, el número total de puestos que la firma puede crear en cada período es $v_t\mu(\theta_t)$. Esta tecnología de reclutamiento es análoga a la usada en el modelo básico DMP con la diferencia que el número de puestos creados es ta en función del número de personas reclutando y no el número de vacantes. La función de emparejamiento en este modelo también tiene retorno constantes a escala y es creciente tanto en el número de desempleados como en el número de personas reclutando.

La función de valor de la firma, que expresa la acumulación periodo a periodo de los beneficios de la misma, es:

$$J(z,n) = z(n-v) - wn + mE\left[J\left(z',n'\right)\right] \tag{2.20}$$

En este caso el número de trabajadores productivos es $l = n - v$ dado que parte de la fuerza laboral de la firma se dedica a reclutar nuevos trabajadores. El descuento de valores futuros de beneficios es en este caso m que representa el factor estocástico de descuento (*stochastic discount factor*) de los dueños de las empresas, que son los hogares. El número de trabajadores de la firma representativa (de la economía) evoluciona de acuerdo a la siguiente dinámica:

$$n' = v\mu(\theta) + (1-x)n \tag{2.21}$$

donde la separación entre trabajadores y la firma ocurre en cada periodo a una tasa x constante y exógena. El problema de maximización de la firma se puede escribir como:

$$max_{\nu} J(z,n) = zn(1-\nu) - wn + mE\left[J\left(z',(\nu\mu(\theta)+(1-x))n\right)\right] \tag{2.22}$$

donde ν es la proporción de reclutadores frente al número total de trabajadores ($\nu = v/n$). La condición de primer orden y la condición envolvente de este problema son:

$$mEJ_n\left(n',z'\right) = \frac{z}{\mu(\theta)} \tag{2.23}$$

$$J_n(n,z) = z(1-\nu) - w + mE\left[J_n(\nu\mu(\theta)+(1-x))\right] \tag{2.24}$$

Podemos simplificar la última ecuación (2.24) usando la ecuación 2.23 de la siguiente manera:

$$J_n(n,z) = z\left(1 + \frac{1-x}{\mu(\theta)}\right) - w \tag{2.25}$$

Con estas dos condiciones podemos encontrar una condición de Euler que gobierna la dinámica de trabajo:

$$\frac{z}{\mu(\theta)} = m\left[z'\left(1+\frac{1-x}{\mu(\theta)}\right) - w'\right] \tag{2.26}$$

El lado izquierdo de la ecuación indica el costo de oportunidad de reclutar un nuevo trabajador e incorpora el hecho que para reclutar un nuevo trabajador la firma tiene que sacrificar producción de bien final dedicando un empleado a reclutar y no producir. La función $\mu(\theta)$ representa el número de empleos nuevos que una persona encargada de reclutar genera. La expresión inversa, $1/\mu(\theta)$, es el número de personas necesarias para generar una nuevo empleo. Por tanto el lado izquierdo representa el costo en términos de producción de generar un nuevo empleo. El lado derecho de la ecuación indica el beneficio neto y descontado de aumentar el tamaño de la firma con un empleado adicional.

2.3.2. Hogares

El hogar representativo deriva utilidad de consumir y se asegura que todos los miembros de la familia tengan el mismo nivel de consumo. Esto implica que las preferencias puedan escribirse como:

$$V(a,n,z) = max_c \left[log(c) - \gamma n + \beta EV\left(a',n',z'\right)\right] \tag{2.27}$$

El hogar maximiza su función de utilidad sujeto a la restricción presupuestal y a la restricción que gobierna la dinámica del creación de empleo:

$$c + a' = wn + a(1+r) \tag{2.28}$$

$$n' = (1-x)n + f(\theta)(1-n) \tag{2.29}$$

Este problema determina que el factor estocástico de descuento de los hogares es igual al factor de descuento y el ratio de la utilidad marginal de consumo del siguiente periodo frente a la utilidad marginal del actual periodo:

$$m = \frac{1}{1+r} = \beta\frac{c}{c'} \tag{2.30}$$

La condición envolvente de este problema es:

$$V_n(a,n,z) = \frac{w}{c} - \gamma + \beta(1-x-f(\theta))EV_n\left(a',n',z'\right) \tag{2.31}$$

2.3.3. Salarios

Similar al modelo DMP, firmas y hogares negocian el salario de la economía. Las dos partes usan un protocolo de negociación tipo Nash donde el salario acordado maximiza el promedio geométrico de los beneficios de ambas partes dado un salario. Matemáticamente, el salario soluciona la siguiente ecuación:

$$w = argmax_{\tilde{w}} V_n^{\phi} J_n^{1-\phi} \tag{2.32}$$

donde V_n y J_n capturan el cambio en la utilidad de hogares y beneficios de la firma dado un cambio en el empleo (condición envolvente).

Usemos la ecuación (2.25) que representa la ecuación de Bellman de las firmas:

$$J_n(n,z) = z\left(1 + \frac{1-x}{\mu(\theta)}\right) - w$$

Si las firmas en vez de pagar el salario w pagan un salario arbitrario $\widetilde{w}$ el valor de la firma cambia de la siguiente forma:

$$J_n(n,z,\tilde{w}) = z\left(1 + \frac{1-x}{\mu(\theta)}\right) - \tilde{w}$$

de tal forma que un cambio en el salario afecta a la firma de la siguiente forma:

$$J_n(n,z,\tilde{w}) = w - \tilde{w} + J_n(n,z)$$

En este caso el cambio en el valor de la firma dado un cambio en el salario $\hat{w}$ esta dado por: $\frac{\partial J_n}{\partial \tilde{w}} = -1$. La condición envolvente del problema de los hogares es:

$$V_n(a,n,z) = -\gamma + \frac{w}{c} + \beta(1 - x + f(\theta)) EV_n\left(a', n', z'\right)$$

Usando esta expresión podemos calcular el valor marginal, para un hogar con activos y un número de trabajadores de equilibrio, de un trabajador adicional pagado un salario arbitrario $\tilde{w}$:

$$V_n(a,n,z,\tilde{w}) = -\gamma + \frac{\tilde{w}}{c} + \beta(1 - x + f(\theta)) EV_n\left(a', n', z'\right)$$

de acá podemos encontrar el cambio en el valor para el hogar de tener un trabajador cuyo salario es $\tilde{w}$:

$$V_n(a,n,z,\tilde{w}) = \frac{\tilde{w}-w}{c} + V_n(a,n,z)$$

En este caso el cambio en la función de valor frente a un cambio en el salario $\hat{w}$ esta dado por: $\frac{\partial Vn}{\partial \tilde{w}} = \frac{1}{c}$. Podemos encontrar el salario de equilibrio usando la ecuación de negociación tipo Nash de la siguiente manera:

$$w = argmax_{\tilde{w}} \phi log(V_n) + (1-\phi) log(J_n)$$

la condición de primer orden es:

$$\frac{\phi}{V_n}\frac{1}{c} - \frac{(1-\phi)}{J_n} = 0$$

que puede re-escribirse como:

$$\phi J_n = c(1-\phi) V_n$$

Para encontrar el salario de equilibrio podemos usar esta ecuación para remplazar $V_n(a,n,z)$ y $V_n(a',n',z')$ de la ecuación (2.31):

$$\phi J_n(n,z) = (1-\phi) w - (1-\phi)\gamma c + \phi(1-x-f(\theta))\beta \frac{c}{c'} E J_n(n',z') \tag{2.33}$$

Podemos simplificar esta expresión usando las ecuaciones (2.25), (2.30) y (2.23) y encontrar la expresión que determina los salarios:

$$w = \phi z(1+\theta) + (1-\phi)\gamma c$$

Los salarios son un promedio ponderado del producto marginal del trabajo, aumentado por el ratio del número de trabajadores reclutando relativo a trabajadores productivos, y la tasa marginal de sustitución entre el ocio (*leisure*) y el trabajo.

2.3.4. Equilibrio

Se requiere que el mercado de bienes y el mercado laboral estén en equilibrio. Esto implica que la producción del bien final es igual al consumo de los hogares y que el número de empleos creados es igual al número de personas que consiguen un trabajo:

$$c = zn(1-v) \tag{2.34}$$

$$\theta = \frac{f(\theta)}{\mu(\theta)} = \frac{vn}{1-n} \tag{2.35}$$

donde

$$f(\theta) = \bar{\mu}\left(\frac{v}{1-n}\right)^{\eta} = \bar{\mu}\theta^{\eta}$$

Shimer (2010) propone y conjetura un equilibrio donde el consumo y los salarios son proporcionales a la productividad mientras el ratio de reclutadores-trabajadores, la fracción de personas reclutando y la tasa de empleo son constantes. En este caso los choques de productividad no tienen ningún efecto sobre el empleo.

Si suponemos que la fracción de trabajadores reclutando y el ratio θ son constantes, podemos verificar que el empleo es constante también. Usando la ecuación de dinámica del empleo (2.29) podemos encontrar un nivel de equilibrio de empleo constante:

$$\bar{n} = \frac{f(\bar{\theta})}{x + f(\bar{\theta})}$$

También podemos verificar que el consumo y los salarios son proporcionales a la productividad:

$$c = \frac{z\left(f(\bar{\theta}) - x\bar{\theta}\right)}{f(\bar{\theta}) + x} = \bar{c}z$$

$$w = \left[\phi\left(1 + \bar{\theta} + (1-\phi)\bar{c}\right)\right]z$$

2.4. Fricciones de búsqueda en un modelo de ciclos reales con capital

Al modelo anterior le falta la posibilidad de que los hogares (o firmas) acumulen capital. A continuación presentamos el modelo con capital que es idéntico a un modelo de ciclos reales pero incorpora las fricciones de búsqueda. Como en Shimer (2010) asumiremos que el capital es acumulado por las firmas. En esta versión omitimos presentar el modelos de los hogares ya que es idéntico al modelo anterior.

2.4.1. Firmas

La firma representativa tiene la mismas características que en el modelo anterior, la única diferencia es que la función de producción incorpora capital y la firma decide cuánto capital acumular. La función de valor de la firma en este caso es:

$$J(z,n,k) = zk^{\alpha}(n-v)^{1-\alpha} + (1-\delta)k - k' - wn + mE\left[J\left(z',n',k'\right)\right] \tag{2.36}$$

El número de trabajadores productivos es $l = n - v$, como en el modelo anterior y conservamos la notación de m que denota el factor estocástico de descuento de los hogares. El número de trabajadores de la firma representativa (de la economía) evoluciona de acuerdo a la siguiente dinámica:

$$n' = v\mu(\theta) + (1-x)n \tag{2.37}$$

Las condiciones de primer orden del problema de maximización de la firma y las condiciones envolvente para el empleo y el capital están dados por :

$$mEJ_n\left(n',z',k'\right) = \frac{(1-\alpha)z}{\mu(\theta)}\left(\frac{k}{n(1-\nu)}\right)^{\alpha} \tag{2.38}$$

$$J_n(n,z,k) = (1-\alpha)z(1-\nu)\left(\frac{k}{n(1-\nu)}\right)^{\alpha} - w + mE\left[J_n(\nu\mu(\theta) + (1-x))\right] \tag{2.39}$$

$$1 = mEJ_k\left(n',z',k'\right)$$

$$J_k(n,z,k) = \alpha z\left(\frac{k}{n(1-\nu)}\right)^{\alpha-1} + 1 - \delta$$

2.4.2. Salarios

Como en la versión anterior las dos partes, firmas y empleados, usan un protocolo de negociación tipo Nash donde el salario acordado maximiza el promedio geométrico de los beneficios de ambas partes dado un salario:

$$w = argmax_{\tilde{w}} V_n^{\phi} J_n^{1-\phi}$$

Usando el mismo procedimiento puede demostrarse que el salario acordado es:

$$w = \phi (1-\alpha) z \left(\frac{k}{n(1-\nu)} \right)^{\alpha} (1+\theta) + (1-\phi) \gamma c$$

2.4.3. Equilibrio

Este modelo incluye como condición de equilibrio la restricción presupuestal agregada que incluye el mercado de capital físico:

$$k' = zk^{\alpha} (n(1-\nu))^{1-\alpha} + (1-\delta) k - c$$

la función de probabilidad de encontrar empleo esta definida por:

$$f(\theta) = \bar{\mu} \theta^{\eta}$$

y como en el modelo anterior, el número de empleos creados es igual al número de personas que consiguen un trabajo, lo que implica que:

$$\theta = \frac{f(\theta)}{\mu(\theta)} = \frac{\nu n}{1-n}$$

2.4.4. Solución

La inclusión de capital hace imposible una solución analítica sobre el efecto de los choques de productividad sobre el empleo. En este caso podemos solucionar el modelo mediante una aproximación de primer orden y asumir que los choques de productividad obedecen el siguiente proceso estocástico:

$$log\left(z'\right) = \rho log\left(z\right) + \varepsilon'$$

2.4.5. Calibración

El cuadro (2.2) presenta el resumen de la calibración del modelo. El modelo es calibrado para un período mensual y no trimestral como el modelo de ciclos reales. La razón para cambiar la frecuencia del modelo tiene que ver con que para datos de Estados Unidos la probabilidad de conseguir trabajo en un trimestre es relativamente cercana a uno lo cual puede llevar a una solución de esquina. Por tanto es aconsejable calibrar el modelo con frecuencia mensual. Esto implica que el factor de descuento es mayor para que el modelo genere una tasa de interés libre de riesgo cercana a 5 % en términos anuales.

Los parámetros que gobiernan el mercado laboral están basados en datos del mercado laboral de Estados Unidos. La tasa exógena (x) que determina la probabilidad de terminación de un trabajo es de 0.0034, que es el promedio de terminación de un trabajo a frecuencia mensual en los Estados Unidos. El parámetro que determina la productividad de la tecnología de emparejamiento ($\bar{\mu}$) es consistente con el número de trabajadores que una persona encargada de reclutar es capaz de atraer en promedio durante un mes. El nivel de des-utilidad de trabajo, que puede también interpretarse como el flujo monetario de seguro de desempleo, es escogido de tal forma que la tasa de desempleo en equilibrio sea de 5 %. Los parámetros η y ϕ que determinan la elasticidad del ratio reclutadores-trabajadores y el poder de negociación de los trabajadores, se escogen para el caso simétrico. Estos dos parámetros son difíciles de inferir usando datos del mercado laboral y siguen siendo de discusión en la literatura. Los parámetros relativos al capital físico, α y δ, son escogidos siguiendo una lógica similar a la usada para calibrar el modelo de ciclos, es decir buscan replicar el ingreso del capital en las cuentas nacionales como fracción del producto total y el ratio de capital a PIB observado. Los parámetros relativos al choque de productividad replican la autocorrelación y desviación estándar del residuo de Solow estimado en frecuencia mensual.

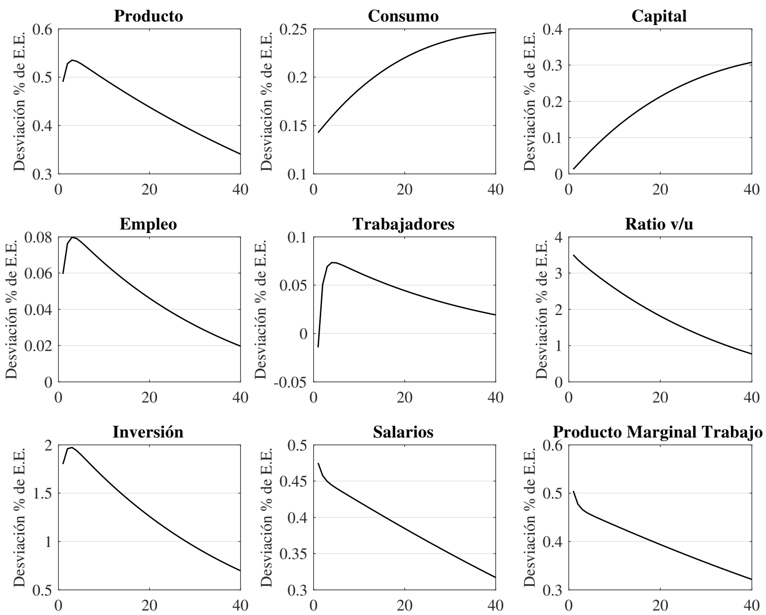
Cuadro 2.2: Modelo Básico de Ciclos Reales con Fricciones de Búsqueda

Parámetro	Símbolo	Valor	Objetivo/ Fuente
Fracción Ingreso Capital	α	1/3	Ingreso Capital Cuentas Nacionales
Factor Descuento	β	0.996	Tasa de interés real 5 % anual
Depreciación del Capital	δ	0.028	Ratio Capital -PIB (29.95 mensual)
Probabilidad terminación trabajo	x	0.0034	Probabilidad transición empleo-desempleo
Nivel desutilidad Trabajo	γ	0.471	Tasa de desempleo 5 %
Poder negociación trabajadores	ϕ	0.5	Caso simétrico
Elasticidad función búsqueda	η	0.5	0.5
Productividad tecnología reclutamiento	$\bar{\mu}$	2.32	Número de trabajadores por reclutador
Autocorrelación productividad	ρ	0.98	Residuo de Solow mensual
Volatilidad choques productividad	σ	0.005	Residuo de Solow mensual

2.4.6. Funciones Impulso Respuesta

La figura (2.4) ilustra la dinámica del modelo con base en las funciones impulso respuesta de las variables endógenas frente a un choque positivo de productividad.

Figura 2.4: Impulso Respuesta Modelo Shimer (2010)



Nota: Solución log-lineal de primer orden (Dynare). Variables en desviaciones porcentuales del estado estacionario.

2.4.7. Estadísticos del modelo

El cuadro (2.3) muestra las principales estadísticas del modelo. Como puede verse el modelo recoge la estructura básica del modelo de ciclos reales ya que reproduce el co-movimiento de las series macroeconómicas más importantes. No obstante, la fricción en el mercado laboral no ayuda al modelo a generar suficiente volatilidad en empleo. Este resultado se explica en parte por la correlación entre el consumo y el producto marginal del trabajo. Dicha correlación hace el producto marginal del trabajo y la tasa marginal de sustitución entre el consumo y el ocio se muevan de manera similar y por ende el choque tenga un efecto similar en salarios. Si los salarios se mueven a la par con la productividad laboral los incentivos para contratar más o menos trabajadores no cambia mucho en el ciclo económico. La adición de capital al modelo rompe el resultado de neutralidad perfecta presentado en la sección anterior, pero no le permite al modelo lograr la suficiente volatilidad relativa de la tasa de empleo en relación a lo observado en los datos.

Cuadro 2.3: Estadísticas Básicas del Modelo de Shimer (2010)

Estadístico	Símbolo	Datos	Modelo
Volatilidad Consumo / Relativo al PIB	σ_c/σ_y	0.58	0.31
Volatilidad Capital / Relativo al PIB	σ_k/σ_y	0.20	0.27
Volatilidad Empleo / Relativo al PIB	σ_n/σ_y	0.65	0.15
Volatilidad Ratio v/u / Relativo al PIB	σ_θ/σ_y	15.30	6.27
Correlación PIB, Consumo	$\rho_{y,c}$	0.83	0.90
Correlación PIB, Capital	$\rho_{y,k}$	0.38	0.26
Correlación PIB, Empleo	$\rho_{y,n}$	0.78	0.98

Los artículos de Shimer (2005) y Shimer (2010) generaron una agenda de investigación amplia buscando resolver el «acertijo» de la falta de volatilidad del empleo en modelos con fricciones en el mercado de trabajo (*Shimer Puzzle*). Una solución a dicho problema es la introducción de rigideces en los salarios (Shimer (2010) dedica el último capítulo a la introducción de rigideces salarios en el modelo básico). Si los salarios son rígidos, el choque de productividad genera incentivos para aumentar la contratación y el valor de un vacante aumenta. Varios trabajos importantes ha analizado y discutido el papel de la rigideces salariales: Hall (2005), Hall and Milgrom (2008) y Mark Gertler (2009). Existen también variantes donde los salarios no son rígidos pero obedecen a un protocolo de negociación diferente al de Nash. Una solución alternativa es calibrar el modelo de una forma distinta, asumiendo que los costos de crear un vacante son en unidades de bien final y la des-utilidad de trabajar (o el beneficio de desempleo) es cercano al salario. Esto genera que el valor de una vacante sea muy pequeña y las desviaciones porcentuales en el ciclo económico tengan mucho más volatilidad. El artículo de referencia de esta solución alternativa es Hagedorn and Manovskii (2008).

Ejercicios

Ejercicio 4. Diamond-Mortensen-Pissarides con seguro de desempleo, costo de vacantes (sin costo de capital) y poder de negociación asimétrico

Considere las siguientes variantes al modelo Diamond-Mortensen-Pissarides: (i) Los desempleados reciben un beneficio de desempleo cada periodo igual a b. (ii) Las firmas pagan un costo c cuando tienen una vacante abierta, pero una vez la vacante está llena, no tienen que incurrir en ningún costo de capital. (iii) El poder de negociación de trabajadores y firmas no son iguales.

Con estas modificaciones las funciones de valor de empleados, desempleados, vacante llenas y vacantes vacías quedan de la siguiente forma:

$$rV_E = w + x\left(V_U - V_E\right)$$

$$rV_u = b + f\left(V_E - V_U\right)$$

$$rV_F = Z - w + x\left(V_V - V_F\right)$$

$$rV_V = -c + q\left(V_F - V_V\right)$$

El salario es determinado de la siguiente manera:

$$w = argmax_w \left(V_E\left(w\right) - V_U\right)^{\sigma}\left(V_F\left(w\right) - V_V\right)^{1-\sigma}$$

Utilizando el protocolo de negociación tipo Nash, demuestre que cuando $V_V = 0$, el salario se puede escribir como:

$$w = \sigma Z + \left(1-\sigma\right) rV_U$$

(hint: tome logaritmos en la maximización del producto de Nash y haga uso de que $\frac{\partial V_E(w)}{\partial w} = \frac{1}{r+x}$ y $\frac{\partial V_F(w)}{\partial w} = -\frac{1}{r+x}$).

1. Muestre que el salario encontrado en el punto anterior también puede escribirse como:

$$w = \sigma(Z + c\theta) + (1-\sigma)b$$

Interprete el significado de esta ecuación. (hint: hago uso de $(V_E(w) - V_U) = \frac{\sigma}{1-\sigma}(V_F(w) - V_V)$ y $\frac{f}{q} = \theta$)

2. Pruebe que la solución del modelo, como función de θ implica:

$$c = \frac{(1-\sigma)(Z-b)}{\frac{r+x}{q(\theta)} + \theta\sigma} \tag{2.40}$$

3. Discuta como cambia la probabilidad de conseguir trabajo para un desempleado (f) y el número de trabajadores en la economía cuando los costos de crear una vacante aumentan. Use la intuición que puede derivarse de la expresión (2.40)

4. Discuta como cambia la probabilidad de conseguir trabajo para un desempleado (f) y el número de trabajadores en la economía cuando los beneficios desempleo aumentan. Use la intuición que puede derivarse de la expresión (2.40)

Ejercicio 5. Eficiencia en el modelo Diamond-Mortensen-Pissarides - La condición de Hosios (1990)

Considere el problema de un planificador central que busca maximizar el bienestar de los hogares de la economía en el estado estacionario. Para simplificar el problema asumamos que la tasa de interés $r \to 0$. En este caso la maximización del planificador puede describirse mediante la siguiente optimización estática:

$$max_{\theta,f} = Z(1-U) + bU - cV$$

sujeto a la restricción $U = \frac{x}{x+f}$. El planificador maximiza la producción (consumo) de la economía, y el bienestar de los desempleados teniendo netos de los costos de crear vacantes. Haciendo uso de la definición de $\theta = \frac{V}{U}$ y de $f = \theta q(\theta)$ este problema puede simplificarse, eliminado la restricción y haciendo que la variable de control sea θ de la siguiente manera:

$$max_{\theta} = Z - \frac{x}{x + \theta q(\theta)} (Z - b + c\theta)$$

1. Encuentre una expresión (una ecuación) para θ que soluciona el problema del planificador central. (hint: $\frac{\partial \theta q(\theta)}{\partial \theta} = \theta q'(\theta) + q(\theta)$ y use la siguiente simplificación $\eta = -\frac{\theta q'(\theta)}{q(\theta)}$).

2. Utilizando la función de emparejamiento $M(u,v) = \bar{\mu} u^{\eta} v^{1-\eta}$ muestre que $\eta = -\frac{\theta q'(\theta)}{q(\theta)}$ ¿Qué representa?

3. Compare la solución óptima del planificador con la solución descentralizada del modelo dada por (2.40) (en el caso de $r = 0$) :

$$c = \frac{(1-\sigma)(Z-b)}{\frac{x}{q(\theta)} + \theta\sigma}$$

¿ En que casos la solución descentralizada es eficiente? bajo que condiciones? Interprete.

Ejercicio 6. Shimer (2010) con costo de vacante en términos de unidades del bien final.

Considere el modelo de Shimer (2010) con la siguiente modificación: los costos de vacante son denominados en unidades del bien final (un costo d por vacante) y no en términos de trabajadores. En este caso el problema de la firma es:

$$J(z,n,k) = zk^{\alpha} n^{1-\alpha} + (1-\delta)k - k' - wn - dv + mE\left[J\left(z', n', k'\right)\right] \tag{2.41}$$

$$n' = v\mu(\theta) + (1-x)n \tag{2.42}$$

1. Encuentre las condiciones de primer orden de la firma (con respecto al número de vacantes, capital el siguiente periodo y las condiciones de envolvente para capital y número de trabajadores). ¿Cuál es la nueva condición de Euler para el número de trabajadores?

2. Usando estas nuevas condiciones, resuelva el modelo en Dynare ¿Cómo cambia las predicciones cuantitativas del modelo? Como cambia la volatilidad del θ y del número de empleados n?

3. ¿En el modelo original de Shimer (2010), cómo cambia la volatilidad del modelo cuando cambia la elasticidad de sustitución intertemporal a 0.5 o a 2?

Ejercicio 7. Modelo de Shimer (2010) con rigidices salariales

Considere el modelo de Shimer (2010) visto en clase con la siguiente modificación: el salario es rígido y responde de la siguiente manera:

$$w_t = \kappa \bar{w}_{ss} + (1-\kappa) w_t^{nash}$$

donde $\kappa \in (0,1)$, $\bar{w}_{ss}$ es el salario en estado estacionario, y w_t^{nash} es el salario que resuelve el protocolo de Nash: $w_t^{nash} = \phi mpl_t (1+\theta_t) + (1-\phi)\gamma c_t$. Cuando $\kappa = 0$, este modelo es idéntico al visto en clase. Cuando $\kappa = 1$, los salarios no responde a cambios en la productividad, el mercado laboral o el consumo de los hogares, y son completamente rígidos. Compare los impulso-repuesta y la volatilidad de las principales variables del modelo cuando $\kappa = 0$ y $\kappa = 0{,}5$. ¿Cómo cambia, en particular, la volatilidad del número de empleados (n), el ratio θ y los salarios? Discuta.

Apéndice

Derivación de la función de valor del empleado

Consideremos el valor de estar empleado por un período corto de tiempo $\triangle t$ tomando en cuenta que la probabilidad de permanecer empleado en cualquier momento del tiempo es e^{-xt}[2]. El valor de recibir un flujo de salarios por el periodo de tiempo $\triangle t$ es:

[2] Esta expresión es el resultado de acumulación continua del factor de descuento: $lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$. Esta última expresión es una de las caracterizaciones posibles de la función exponencial. Para verlo se puede mostrar que si $y = lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, entonces $ln(y) = ln\left(lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right) = lim_{n\to\infty} ln\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = lim_{n\to\infty} n ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$. De acá podemos hacer la siguiente cambio: $lim_{n\to\infty}\frac{x}{\left(\frac{x}{n}\right)} ln\left(1+\frac{x}{n}\right) = lim_{h\to 0} x\frac{ln(1+h)}{h}$ cuando $h = x/n$. A este límite podemos restarle $ln(1)$ que es cero: $lim_{h\to 0} x\frac{ln(1+h)-ln(1)}{h}$ pero esta es la

$\int_{t=0}^{\triangle t} e^{-(r+x)t} w dt = \frac{1-e^{-(r+x)\triangle t}}{r+x} w$. El valor de ser empleado en el periodo $\triangle t$ es igual al valor asociado con recibir el salario acumulado en dicho periodo más el valor que al final del periodo con cierta probabilidad el trabajador siga con empleo o transite a un estado donde se convierte en desempleado:

$$V_E(\triangle t) = \frac{1-e^{-(r+x)\triangle t}}{r+x} w + e^{-r\triangle t}\left[e^{-x\triangle t} V_E(\triangle t) + \left(1-e^{-x\triangle t}\right) V_U(\triangle t)\right]$$

simplificando esta expresión:

$$V_E(\triangle t) = \frac{w}{r+x} + \frac{e^{-r\triangle t}\left(1-e^{-x\triangle t}\right) V_U(\triangle t)}{1-e^{-(r+x)\triangle t}}$$

Ahora tomamos el límite cuando $\triangle t \to 0$. Para eso necesitamos la regla de L´Hopital[3] y encontramos el valor de estar empleado:

$$V_E = \frac{w}{r+x} + \frac{x}{r+x} V_U$$

Si re-organizamos esta expresión tenemos la ecuación (2.8):

$$V_E = \frac{w + xV_u + (1-x) V_E}{1+r}$$

definición de la derivada de: $lim_{h\to 0} x \frac{ln(1+h)-ln(1)}{h} = x\frac{d(ln(t))}{dt}$ cuando $t=1$ y por ende, $x\frac{d(ln(t))}{dt} = x\frac{1}{t}$ lo que muestra que $ln(y) = x$ y $y = e^x$.

[3]La regla de Hopital dice que para dos funciones f y g continuas y derivables en c entonces $lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

Capítulo 3

El modelo Neokeynesiano

El modelo de ciclos reales abrió la puerta a los modelos de equilibrio general dinámicos, que se han convertido el punto de partida del análisis macroeconómico moderno. En ese sentido el modelo de ciclos reales es una referencia obligada en la macroeconomía moderna. No obstante su papel central, el modelo de ciclos reales tiene varias limitaciones importantes: el modelo de ciclos reales abstrae por completo de variables monetarias y por tanto es mudo frente a cualquier pregunta sobre política monetaria. Adicionalmente, en el modelo de ciclos reales, la solución descentralizada coincide con el planificador central, lo cual implica que la economía es eficiente y que cualquier política de estabilización es innecesaria e indeseable. Este capítulo presenta el modelo Neokeynesiano donde los rigideces en los precios crean el espacio para que las variables monetarias tengan un efecto en las variables reales. Antes de presentar el modelo, exploremos el papel de las variables monetarias en el contexto de una economía sin fricciones y sin acumulación de capital. Esta parte de las notas siguen de cerca la exposición de Galí (2015).

3.1. Modelo ciclos reales con dinero y precios

A continuación presentamos un modelo de ciclos reales donde la incertidumbre se debe a choques de productividad. Esta versión no incluye capital para simplificar la exposición.

3.1.1. Hogares

Los hogares maximizan su utilidad intertemporal que depende del consumo y la des-utilidad de trabajo:

$$max_{\{c_t,N_t,B_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[log\left(C_t\right) - \frac{N_t^{1+\varepsilon}}{1+\varepsilon} \right]$$

sujeto a la restricción presupuestal:

$$P_t C_t + Q_t B_{t+1} = B_t + W_t N_t$$

El precio del consumo del bien final es P_t y B_t representa los bonos nominales no contingentes de un período que los hogares puede acumular (o des-acumular) y que pagan 1 unidad del bien final cuando maduran y tiene un costo de Q_t[1]. Las condiciones de primer orden de este problema son la ecuación de Euler y la condición de ocio-trabajo:

$$Q_t = \beta E_t \left[\frac{C_t}{C_{t+1}} \frac{P_t}{P_{t+1}} \right] \quad (3.1)$$

$$N_t^{\varepsilon} = \frac{W_t}{P_t C_t} \quad (3.2)$$

3.1.2. Firmas

La firma representativa maximiza beneficios usando una función de producción sujeta a choques de productividad:

$$max_{\{N_t\}_{t=0}^{\infty}} \left[P_t Y_t - W_t N_t \right] = P_t Z_t N_t^{1-\alpha} - W_t N_t$$

La condición óptima del factor de producción es:

$$\left(1-\alpha\right) Z_t N_t^{-\alpha} = \frac{W_t}{P_t}$$

[1]En este caso es necesario asumir una condición de no Ponzi que asegura que el valor de los bonos es positivo en el limite: $lim_{T\to\infty} E_t\left(B_{t+1}\right) \geq 0$

3.1.3. Equilibrio

Dado que en este modelo abstraemos de otros componentes de la demanda interna, como la inversión o el gasto del gobierno, la producción del bien final es igual al consumo del bien final. Esto implica que las firmas tienen beneficio cero y los bonos son cero en equilibrio. El otro mercado que tiene que vaciarse es el mercado laboral donde la oferta laboral debe ser igual a la demanda.

Si hacemos una aproximación log-lineal al modelo podemos expresar estas condiciones de equilibrio de la siguiente manera (donde las variables en minúsculas son desviaciones log-lineales):

$$y_t = c_t$$

$$y_t = z_t + (1-\alpha)\, n_t$$

dado que la condición del primer orden de hogares y firmas son:

$$\varepsilon n_t = w_t - p_t - c_t$$

$$z_t - \alpha n_t = w_t - p_t$$

la producción y el trabajo de equilibrio son:

$$y_t = z_t$$

$$n_t = 0$$

La producción esta dada exclusivamente por la productividad y la cantidad de trabajo es constante dado que por las preferencias de los hogares el efecto sustitución cancela complemente el efecto ingreso cuando hay cambios en los salarios reales. El salario real de la economía se mueve uno a uno con la productividad. En el modelo no hemos establecido el papel del dinero ni como se establecen los precios. Podemos asumir una demanda de dinero ad-hoc, que puede justificarse bajo diferentes supuestos y que en forma log-lineal toma la siguiente forma:

$$m_t - p_t = y_t - \eta i_t$$

que indica que los balances reales de dinero, son iguales al ingreso menos la semi-elasticidad η con respecto a la tasa de interés. Es intuitivo que mayor ingreso y menores tasas de interés incentivan una mayor tenencia de saldos monetarios reales.

La condición de Euler del hogar representativo (3.1) puede aproximarse log-linealmente de la siguiente manera:

$$c_t = E_t\left(c_{t+1}\right) - \left(i_t - E_t\left[\pi_{t+1}\right] - \rho\right) \tag{3.3}$$

donde $\pi_{t+1} = log\left(P_{t+1}\right) - log\left(P_t\right)$ es la tasa de inflación, $\rho = -log\left(\beta\right)$ es la tasa de descuento de los hogares (la tasa de interés real de estado estacionario), y $i_t = -log\left(Q_t\right)$ es la tasa de interés nominal[2]. Usando las condiciones de equilibrio la ecuación de Euler implica que la tasa de interés real de la economía es:

$$r_t = \rho + E\left[\triangle z_{t+1}\right] \tag{3.4}$$

En esta economía todas las variables reales son independientes de las variables monetarias. El producto, el empleo, el consumo, la tasa de interés real quedan totalmente determinadas por el choque de productividad. Este modelo ilustra la conocida «dicotomía neoclásica» donde las variables reales y monetarias pueden ser estudiadas por separado. Para conocer la dinámica de las variables monetarias el modelo necesita adicionalmente una descripción de la política monetaria.

[2]Es importante anotar que en esta aproximación log-lineal no utilizamos las desviaciones de Q_t relativo a su estado estacionario, sino que dejamos explicita esa diferencia al hacer $log\left(\beta\right) - log\left(Q_t\right) = i_t - \rho$. En otras palabras, la tasa de interés nominal no está en desviaciones de su nivel de estado estacionario como si lo están el consumo y los precios.

3.1.4. Regla Tasa de Interés

Supongamos que la autoridad monetaria de esta economía siga una simple regla de tasas de interés de la siguiente forma:

$$i_t = \rho + \phi_\pi \pi_t \tag{3.5}$$

donde ϕ_π es un parámetro no negativo. Si suponemos que la ecuación de Fischer se cumple:

$$i_t = E_t[\pi_{t+1}] + r_t \tag{3.6}$$

la regla de tasas de interés implica que:

$$\phi_\pi \pi_t = E_t[\pi_{t+1}] + r_t - \rho$$

Esta expresión es una ecuación diferencial en la tasa de inflación que puede solucionarse haciendo iteraciones hacia adelante. En este caso la inflación en el periodo actual es una función de la inflación esperada en un horizonte arbitrariamente distante en el futuro y la suma de las desviaciones de la tasa de interés real y el factor de descuento de los hogares esperadas en el futuro:

$$\pi_t = \frac{1}{(\phi_\pi)^j} E_t\left[\pi_{t+j}\right] + \sum_{i=0}^{j} \frac{1}{(\phi_\pi)^{i+1}} E_t\left[r_{t+i} - \rho\right] \tag{3.7}$$

Esta ecuación tiene una única solución cuando $\phi_\pi > 1$ dada por:

$$\pi_t = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_\pi^{-(i+1)} E_t\left[r_{t+i} - \rho\right]$$

En este caso la senda de inflación está determinada por la senda esperada de los choques de productividad que determinan la dinámica de las tasas de interés real siguiendo la ecuación (3.4). Por el contrario, cuando $\phi_\pi < 1$, existe más de una senda de inflación factible que cumple la regla de tasas de interés y la economía exhibe multiplicidad de equilibrio en las variables nominales. Por ejemplo, la inflación puede seguir la siguiente dinámica:

$$\pi_{t+1} = \phi_\pi \pi_t - (r_t - \rho) + \xi_{t+1}$$

donde $\{\xi_t\}$ es una secuencia arbitraria de choques no fundamentales que cumplen que $E_t[\xi_{t+1}] = 0$ para todos los periodos. La condición que condiciona la reacción de la autoridad monetaria en tasas de interés frente a cambios en la inflación es conocida como el principio de Taylor (*Taylor Principle*) . El principio de Taylor sugiere que los Bancos Centrales tienen que responder agresivamente a cambios en la inflación usando las tasas de interés para que la economía no exhiba equilibrio múltiple y las expectativas de inflación estén ancladas en choques fundamentales.

Es importante anotar que en este modelo si bien el principio de Taylor sirve de guía a la política monetaria, dado que las variables reales están determinadas por los choques fundamentales, cualquier política monetaria es óptima ya que no tiene efecto sobre la utilidad de los hogares y los beneficios de las empresas. En este caso el bienestar de los agentes económicos no depende de la estabilización de la inflación o de cualquier otro objetivo de política monetaria. El modelo Neokeynesiano presenta una descripción alternativa de la economía donde las variables monetarias tienen efectos reales y la política monetaria afecta el bienestar de los hogares y firmas.

3.2. Modelo Neokeynesiano

3.2.1. Hogares

Los hogares son este modelo idénticos a los analizados en la sección anterior. Con el propósito de presentar una versión más general del modelo presentamos acá el caso donde las preferencias exhiben una elasticidad de sustitución intertemporal que puede ser diferente de la unidad. El problema de maximización del hogar representativo es:

$$max_{\{c_t, N_t, B_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{N_t^{1+\varepsilon}}{1+\varepsilon} \right]$$

sujeto a la restricción presupuestal:

$$P_tC_t + Q_tB_{t+1} = B_t + W_tN_t$$

Las condiciones de primer orden de este problema están determinadas por:

$$Q_tC_t^{-\sigma} = \beta E_t\left[C_{t+1}^{-\sigma}\frac{P_t}{P_{t+1}}\right] \tag{3.8}$$

$$N_t^{\varepsilon} = \frac{W_t}{P_t}C_t^{-\sigma} \tag{3.9}$$

y que en log-desviaciones del estado estacionario se transforman en:

$$c_{t+1} = E_t\left(c_{t+1}\right) - \frac{1}{\sigma}\left(i_t - E_t\left[\pi_{t+1}\right] - \rho\right) \tag{3.10}$$

$$\varepsilon n_t = w_t - p_t - \sigma c_t \tag{3.11}$$

El factor estocástico de descuento de los hogares en términos reales y nominales están dado por las siguientes expresiones:

$$\tilde{Q}_t = \beta\frac{\Lambda_{t+1}}{\Lambda_t} = \beta\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\sigma}$$

$$Q_t = \beta\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\sigma}\frac{P_t}{P_{t+1}}$$

También podemos definir el factor estocástico de descuento entre dos periodos, t y $t+k$ de la siguiente forma:

$$Q_{t,t+k} = \beta^k\left(\frac{C_{t+k}}{C_t}\right)^{-\sigma}\frac{P_t}{P_{t+k}}$$

Adicionalmente supondremos que los hogares tienen una demanda por saldos de dineros asumiendo la siguiente función ad-hoc:

$$m_t - p_t = y_t - \zeta i_t \tag{3.12}$$

donde ζ es la semi-elasticidad de los saldos reales con respecto a la tasa de interés nominal.

3.2.2. Firmas

Existen varias formas de modelar la producción en el modelo Neokeynesiano. Una opción es asumir que la producción se divide en dos etapas: producción intermedia usando trabajo y producción final que agrega las diferentes variedades intermedias. Un elemento imprescindible del modelo es la rigidez de precios. Los precios de los productos intermedios están fijos por un periodo de tiempo determinado. Este elemento se le conoce como fijación de precios a la Calvo, siguiendo el trabajo original de Calvo (1983). Presentamos primero el problema asociado a la producción del bien final y luego describiremos el problema de los bienes intermedios.

3.2.2.1. Sector Bien Final

El productor representativo del bien final opera en un mercado perfectamente competitivo y maximiza beneficios tomando como dados los precios de los bienes intermedios y una tecnología de agregación. El problema de optimización del producto final es:

$$max_{y_t(z)} \left[P_t Y_t - \int p_t(z) \, y_t(z) \, dz \right] \tag{3.13}$$

sujeto a:

$$C_t = Y_t = \left[\int y_t(z)^{\frac{\theta-1}{\theta}} dz \right]^{\frac{\theta}{\theta-1}} \tag{3.14}$$

donde θ representa la elasticidad de sustitución de los diferentes bienes intermedios $y_t(z)$ que están indexados por z, donde $z \in Z$. La condición de primer orden de este problema es:

$$\frac{p_t(z)}{P_t} = \left(\frac{y_t(z)}{Y_t} \right)^{-\frac{1}{\theta}} \tag{3.15}$$

gracias al supuesto de perfecta competencia, los beneficios del productor de bien final son cero y usando la ecuación de primer orden (3.15), obtenemos una expresión para los precios agregados que toma la siguiente forma:

$$P_t = \left(\int p_t(z)^{1-\theta} \right)^{\frac{1}{1-\theta}} \tag{3.16}$$

3.2.2.2. Sector Bienes Intermedios

El sector de bienes intermedios esta caracterizado por un continuo de productores que compiten en un mercado monopolístico. Cada productor maximiza sus beneficios tomando como dado la demanda de su variedad. Cada firma produce un bien diferenciado indexado por z usando una función de producción con rendimientos decrecientes a escala con el trabajo como único factor de producción y sujeto a un choque agregado de productividad denotada:

$$y_t(z) = A_t n_t(z)^{1-\eta} \tag{3.17}$$

Donde η mide el grado de rendimientos decrecientes, A_t es el choque de productividad agregada y $n_t(z)$ la cantidad de trabajo usada en la producción de la variedad z. Adicionalmente, los productores de bienes intermedio pueden cambiar sus precios esporádicamente. Antes de presentar la solución al problema de maximización de beneficios con rigideces de precios, escribamos el problema estático que cada productor enfrenta en este sector:

$$max_{y_t(z)} \left[p_t(z) y_t(z) - CT_t(z) \right] \tag{3.18}$$

sujeto a:

$$\frac{p_t(z)}{P_t} = \left(\frac{y_t(z)}{Y_t} \right)^{-\frac{1}{\theta}} \tag{3.19}$$

donde $CT_t(z)$ es el costo total de producción del productor del bien intermedio indexado por z.

La condición de optimalidad de este problema implica que el productor de bien final fija un precio con base en el costo marginal pero aplicando un margen (*mark-up*). La condición de primer orden puede escribirse como:

$$\frac{p_t(z)}{P_t} = \frac{\theta}{\theta - 1} MC_t(z) \tag{3.20}$$

donde $MC_t(z)$ es el costo marginal de productor (en términos reales) y el margen del precio de cada variedad es proporcional a la elasticidad de sustitución de los bienes intermedios. Dicha elasticidad (θ) puede ser igual e inferior a la unidad, en cuyo caso los bienes son complementarios o perfectamente sustitutos, pero para que el problema este bien definido y tenga relevancia, suponemos que es mayor a uno, lo que implica que los productores de bienes intermedios disfrutan de rentas en equilibrio.

3.2.2.3. Precios a la Calvo

Siguiendo a Calvo (1983) asumimos que los productores de bienes intermedios cambian su precios esporádicamente y de forma aleatoria. En cada periodo, una firma del sector intermedio puede decidir óptimamente su precio con probabilidad $1-\alpha$, o con probabilidad α retiene el precio escogido en el periodo anterior. Dado que hay un continuo de firmas, algunas firmas tendrán precios que fueron determinados muchos periodos atrás, mientras otras firmas podrán actualizar sus precios en el periodo actual.

Definamos $p_t^*(z)$ como el precio óptimo que cada firma escoge cuando tiene la posibilidad de actualizar su precio. En este caso la firma escoge $p_t^*(z)$ como aquel que precio que maximiza sus beneficios en los siguientes periodos donde con probabilidad α el precio va a ser constante:

$$max_{p^*(z)}\left[E_t\sum_{k=0}^{\infty}Q_{t,t+k}\left(p^*(z)\,y_t(z)-CT_t(z)\right)\right]$$

Dividiendo por P_{t+k} la expresión para tener los beneficios en términos reales y haciendo uso de las condiciones de optimalidad estáticas y de la definición del factor estocástico de descuento de los hogares podemos escribir este problema como:

$$max_{p_t^*(z)}\left[E_t\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha\beta)^k\left(\frac{C_{t+k}}{C_t}\right)^{-\sigma}\left[\left(\frac{p_t^*(z)^{1-\theta}}{P_{t+k}^{1-\theta}}\right)Y_{t+k,t}-\left(\frac{p_t^*(z)^{-\theta}}{P_{t+k}^{-\theta}}\right)Y_{t+k,t}MC_{t+k,t}(z)\right]\right] \tag{3.21}$$

Derivando con respecto a $p^*(z)$, encontramos la condición de primer orden con respecto al precio que sobrevive con probabilidad α^k:

3.2.3. Log-linearización ecuación de precios

$$p_t^*(z) = \frac{\theta \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha\beta)^k E_t \left[Y_{t+k,t}^{1-\sigma} MC_{t+k,t} P_{t+k}^{\theta} \right]}{(\theta - 1) \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha\beta)^k E_t \left[Y_{t+k,t}^{1-\sigma} P_{t+k}^{\theta-1} \right]} \tag{3.22}$$

Esta es la ecuación básica de precios del modelo Neokeynesiano. En el caso límite donde no hay rigidez de precios y las firmas espera que el precio pueda ser fijado óptimamente en el siguiente periodo $(k = 0)$, esta ecuación de precios colapsa a la condición óptima del modelo de precios flexibles: $\frac{p_t^*(z)}{P_t} = \frac{\theta}{\theta-1} MC_t$

El modelo Neokeynesiano usualmente utiliza una aproximación de primer orden de las ecuaciones del modelo relativo al estado estacionario con inflación cero. En este estado estacionario las variables reales se mantienen constantes $(Y_{t+k} = Y_t = Y)$, los precios precios relativos son iguales a uno:

$$\pi = \frac{p_t^*(z)}{P_t} = \frac{p_t^*(z)}{P_{t+k}} = \frac{p^*(z)}{P} = 1$$

y el factor estocástico de descuento de los hogares esta dado por:

$$Q_{t,t+k} = \beta^k$$

Es conveniente dividir la ecuación de precios (3.22) por P_{t-1} antes de hacer la aproximación de primer orden de dicha expresión[3]:

$$\frac{p_t^*(z)}{P_{t-1}} = \frac{\theta \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha\beta)^k E_t \left[Y_{t+k,t}^{1-\sigma} MC_{t+k,t} P_{t+k}^{\theta} \right]}{(\theta - 1) \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha\beta)^k E_t \left[Y_{t+k,t}^{1-\sigma} P_{t+k}^{\theta-1} \right]} \frac{1}{P_{t-1}}$$

Dado que la aproximación de primer orden toma varios pasos, concentremos primero en la aproximación de primer orden del lado izquierdo de la siguiente ecuación:

[3] Para esta ecuación hacemos uso de que en equilibrio $Y_t = C_t$ para todo tiempo t.

$$\frac{p_t^*(z)}{P_{t-1}}\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha\beta)^k E_t\left[Y_{t+k}^{1-\sigma}P_{t+k}^{\theta-1}\right]=\frac{\theta}{\theta-1}\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha\beta)^k E_t\left[Y_{t+k}^{1-\sigma}MC_{t+k}P_{t+k}^{\theta}\right]\frac{1}{P_{t-1}} \quad (3.23)$$

La expresión para la aproximación de primer orden de este término es:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha\beta)^k\left[Y^{1-\sigma}P^{\theta-1}\right]+\frac{1}{P}\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha\beta)^k\left[Y^{1-\sigma}P^{\theta-1}\right]E_t\left(p_t^*(z)-P\right)-\frac{P}{P^2}\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha\beta)^k\left[Y^{1-\sigma}P^{\theta-1}\right]E_t\left(P_{t-1}-P\right)$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha\beta)^k\left[Y^{1-\sigma}(\theta-1)P^{\theta-2}\right]E_t\left(P_{t+k}-P\right)+\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha\beta)^k\left[(1-\sigma)Y^{-\sigma}P^{\theta-1}\right]E_t\left(Y_{t+k}-Y\right)$$

Esta ecuación se puede simplificar en:

$$Y^{1-\sigma}P^{\theta-1}E_t\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha\beta)^k\left[1+\hat{p}_t^*(z)-\hat{p}_{t-1}+(\theta-1)(\hat{p}_{t+k}-p)+(1-\sigma)(\hat{y}_{t+k}-y)\right] \quad (3.24)$$

Lo mismo podemos hacer con el lado derecho de la ecuación (3.23) cuya aproximación de primer orden después de ser simplificada queda[4]:

$$Y^{1-\sigma}P^{\theta-1}E_t\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha\beta)^k\left[1-\hat{p}_{t-1}+\theta\hat{p}_{t+k}-(\theta-1)p+(1-\sigma)(\hat{y}_{t+k}-y)+(\hat{mc}_{t+k}-mc)\right] \quad (3.25)$$

Combinando las ecuaciones (3.24) y (3.25) tenemos que:

$$E_t\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha\beta)^k\left[\hat{p}_t^*(z)-\hat{p}_{t+k}\right]=E_t\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha\beta)^k\left[\hat{mc}_{t+k,t}-mc\right] \quad (3.26)$$

lo que nos lleva a encontrar la expresión definitiva de precios:

$$\hat{p}_t^*(z)=(1-\alpha\beta)E_t\left[\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha\beta)^k\left[\hat{mc}_{t+k,t}-mc+\hat{p}_{t+k}\right]\right] \quad (3.27)$$

[4]En esta ecuación es importante recordar que en el estado estacionario $\frac{\theta}{\theta-1}MC=1$

Si definimos $\hat{mc_{t+k,t}} \equiv \hat{mc}_{t+k,t} - mc$ y restamos a ambos lados los precios del periodo anterior podemos escribir esta ecuación como:

$$\hat{p}_t^*(z) - p_{t-1} = (1-\alpha\beta) E_t \left[\sum_{k=0}^{\infty} (\alpha\beta)^k \left[\hat{mc_{t+k,t}} + (\hat{p}_{t+k} - p_{t-1}) \right] \right] \tag{3.28}$$

La ecuación (3.27) puede re-escribirse, haciendo uso del hecho que en el estado estacionario sin inflación el precio relativo es igual a $\frac{\theta}{\theta-1}MC$, y si definimos que $\mu = log\left(\frac{\theta}{\theta-1}\right)$ tenemos que en el estado estacionario $mc = -\mu$, por tanto:

$$\hat{p}_t^*(z) = \mu + (1-\alpha\beta) E_t \left[\sum_{k=0}^{\infty} (\alpha\beta)^k \left[\hat{mc}_{t+k,t} + \hat{p}_{t+k} \right] \right] \tag{3.29}$$

En este caso podemos ver que el precio óptimo que las firmas eligen es igual al margen óptimo más la suma ponderada de los costos nominales marginales, actuales y futuros, descontados por la probabilidad esperada de que el actual precio fijado no cambie en los siguientes periodos.

3.2.4. Dinámica de la Inflación

Recordemos que el nivel de precios de la economía esta dado por:

$$P_t = \left(\int p_t(z)^{1-\theta} \right)^{\frac{1}{1-\theta}} \tag{3.30}$$

este nivel de precios comprende dos subconjuntos de precios: los precios fijados en el periodo anterior, y los precios de las firmas que ajustan un nuevo precio de acuerdo al problema de optimización expuesto en la sección anterior. Sea s el subconjunto de las firmas que no re-optimizan sus precios en el periodo t donde $s \in Z$. El nivel de precios agregados es:

$$P_t = \left(\int_s p_t(z)^{1-\theta} + (1-\alpha) p^*(z) \right)^{\frac{1}{1-\theta}} = \left(\alpha P_{t-1}(z)^{1-\theta} + (1-\alpha) p_t^*(z) \right)^{\frac{1}{1-\theta}}$$

ya que todas las firmas que re-optimizan su precios, escogen el mismo precio óptimo $p^*(z)$ y las firmas que no ajustan sus precios tienen la misma distribución de precios del periodo anterior ajustado por el hecho de que suman una fracción α de las firmas con precios iguales del periodo anterior. Si dividimos a ambos lados por P_{t-1} tenemos una ecuación que describe la inflación de la economía:

$$\Pi_t^{1-\theta} = \alpha + (1-\alpha)\left(\frac{p_t^*(z)}{P_{t-1}}\right)^{1-\theta}$$

donde $\Pi_t = \frac{P_t}{P_{t-1}}$. Si log-linearizamos esta ecuación en proximidad al estado estacionario sin inflación donde $\Pi_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} = 1$ y $p_t^*(z) = P_{t-1}$, tenemos que:

$$e^{\pi_t(1-\theta)} = \alpha + (1-\alpha)\left(e^{(\hat{p}_t^*(z)-p_{t-1})(1-\theta)}\right) \tag{3.31}$$

donde $\pi_t = log(\Pi_t)$ es la tasa de inflación de la economía. La aproximación de primer orden de esta ecuación es:

$$\pi_t = (1-\alpha)\left(\hat{p}_t^*(z) - \hat{p}_{t-1}\right) \tag{3.32}$$

en este caso la economía tiene una inflación diferente de cero en la medida que las firmas que actualizan sus precios fijen precios diferentes a los precios promedio de la economía observados en el periodo anterior.

3.2.5. Equilibrio

El equilibrio de esta economía requiere que la producción total del bien final sea igual al consumo:

$$Y_t = C_t \tag{3.33}$$

lo que implica que la ecuación de Euler de los hogares se puede escribir en términos del producto agregado de la economía:

$$y_t = E_t(y_{t+1}) - \frac{1}{\sigma}\left(i_t - E_t[\pi_{t+1}] - \rho\right) \tag{3.34}$$

El mercado de trabajo también debe estar en equilibrio lo cual implica que la cantidad agregada de horas de trabajo usadas en la producción de bienes intermedios debe ser igual a la oferta laboral de los hogares:

$$N_t = \int n_t(z)\,dz \tag{3.35}$$

usando la función de producción (3.17) y la condición de optimalidad de la producción de cada variedad (3.19) esta condición de equilibrio puede escribirse como:

$$N_t = \left(\frac{Y_t}{A_t}\right)^{\frac{1}{1-\eta}} \int \left(\frac{p_t(z)}{P_t}\right)^{\frac{-\theta}{1-\eta}} dz \tag{3.36}$$

cuya aproximación (log-lineal) de primer orden es:

$$y_t = a_t + (1-\eta)\,n_t \tag{3.37}$$

dado que en el estado estacionario sin inflación $\hat{p}_t(z) = \hat{p}_t$ no hay dispersión de precios. En el apéndice 3.3.1 se muestra que la desviación del estado estacionario de $\int \left(\frac{p_t(z)}{P_t}\right)^{\frac{-\theta}{1-\eta}} dz$ es cero.

3.2.6. Costos Marginales

El costo marginal nominal frente a cambios en el número de horas nos dice como cambia los costos total nominales cuando cambia las horas de trabajo. Podemos hallar esta expresión como:

$$\frac{\partial TC}{\partial N} = \frac{\partial TC}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial N} = MC \cdot MPL \tag{3.38}$$

donde MC es el costo marginal nominal y MPL es el producto marginal del trabajo. Por tanto, el costo marginal real puede escribirse como:

$$MC_t = \frac{W_t}{P_t}\frac{1}{MPL_t} \tag{3.39}$$

que en términos de desviaciones del estado estacionario sin inflación, puede re-escribirse como:

$$mc_t = w_t - \hat{p}_t - a_t - log\,(1-\eta) + \eta n_t \tag{3.40}$$

usando la ecuación log-lineal que define la producción (3.37) tenemos que:

$$mc_t = w_t - \hat{p}_t - \frac{1}{1-\eta}\,(a_t - \eta y_t) - log\,(1-\eta) \tag{3.41}$$

ahora podemos escribir el costo marginal de la firma para k periodos adelante:

$$mc_{t+k} = w_{t+k} - \hat{p}_{t+k} - \frac{1}{1-\eta}\,(a_{t+k} - \eta y_{t+k}) - log\,(1-\eta) \tag{3.42}$$

una firma que fija su precio en el periodo t tiene un costo marginal que depende de como la producción para dicha firma se desvía de la producción que debería tener si pudiera reoptimizar su precios en dicho periodo:

$$mc_{t+k,t} = mc_{t+k} + \frac{\eta}{1-\eta}\left(y_{t+k,t} - y_{t+k}\right) \tag{3.43}$$

que usando la condición de demanda para cada variedad (3.19) puede re-escribirse como:

$$mc_{t+k,t} = mc_{t+k} - \frac{\eta\theta}{1-\eta}\,(\hat{p}_t^*\,(z) - \hat{p}_{t+k}) \tag{3.44}$$

Cuando la función de producción tiene rendimientos constantes a escala $(\eta = 0)$ el costo marginal es igual para todas las firmas, dado que los costos son independientes del tamaño de producción y de la capacidad que tiene la firma de ajustar o no precios.

3.2.7. Curva de Phillips Neokeynesiana

La curva de Phillips relaciona la inflación con el crecimiento o el desempleo. En el modelo Neokeynesiano podemos derivar una curva de Phillips usando las ecuaciones que describen la dinámica de la inflación y haciendo uso de la expresión de costos marginales (3.44) conjuntamente con la ecuación que caracteriza los precios óptimos (3.27) de la siguiente forma:

$$\hat{p}_t^*(z) = (1-\alpha\beta) E_t \left[\sum_{k=0}^{\infty} (\alpha\beta)^k \left[\hat{mc}_{t+k} - \frac{\eta\theta}{1-\eta} \left(\hat{p}_t^*(z) - \hat{p}_{t+k}\right) + \hat{p}_{t+k} \right] \right] \tag{3.45}$$

que de manera simplificada puede escribirse como:

$$\hat{p}_t^*(z) = (1-\alpha\beta) E_t \left[\sum_{k=0}^{\infty} (\alpha\beta)^k \left[\Theta \hat{mc}_{t+k} + \hat{p}_{t+k} \right] \right] \tag{3.46}$$

donde $\Theta = \frac{1-\eta}{1-\eta+\eta\theta}$. Restando los precios del periodo anterior a ambos lados:

$$\hat{p}_t^*(z) - \hat{p}_{t-1} = (1-\alpha\beta) E_t \left[\sum_{k=0}^{\infty} (\alpha\beta)^k \left[\Theta \hat{mc}_{t+k} + \left(\hat{p}_{t+k} - \hat{p}_{t-1}\right) \right] \right] \tag{3.47}$$

Podemos separar las dos sumatorias del lado derecho de la ecuación,

$$\hat{p}_t^*(z) - \hat{p}_{t-1} = (1-\alpha\beta) E_t \left[\sum_{k=0}^{\infty} (\alpha\beta)^k \Theta \hat{mc}_{t+k} \right] + (1-\alpha\beta) \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha\beta)^k \left(\hat{p}_{t+k} - \hat{p}_{t-1}\right) \tag{3.48}$$

y remplazar la secuencia de inflaciones haciendo uso de la definición de inflación[5], $\hat{p}_{t+j} - \hat{p}_{t+j-1} = \pi_{t+j}$,

$$\hat{p}_t^*(z) - \hat{p}_{t-1} = (1-\alpha\beta) \Theta E_t \left[\sum_{k=0}^{\infty} (\alpha\beta)^k \left[\hat{mc}_{t+k} \right] \right] + \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha\beta)^k E_t \left(\pi_{t+k}\right) \tag{3.49}$$

---

[5] La simplificación de la secuencia de inflaciones puede verse expandiendo la sumatoria: $(1-\alpha\beta)\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha\beta)^k(\hat{p}_{t+k}-\hat{p}_{t-1}) = (1-\alpha\beta)\Big[(\hat{p}_t-\hat{p}_{t-1}) + (\alpha\beta)(\hat{p}_{t+1}-\hat{p}_t+\hat{p}_t-\hat{p}_{t-1}) + (\alpha\beta)^2(\hat{p}_{t+2}-\hat{p}_{t+1}+\hat{p}_{t+1}-\hat{p}_t+\hat{p}_t$ este último término se puede simplificar como: $(1-\alpha\beta)\Big[\pi_t + (\alpha\beta)(\pi_{t+1}+\pi_t) + (\alpha\beta)^2(\pi_{t+2}+\pi_{t+1}+\pi_t) + \ldots\Big]$. Multiplicando el coeficiente que se antepone a la sumatoria tenemos: $\Big[\pi_t + (\alpha\beta)(\pi_{t+1}+\pi_t) + (\alpha\beta)^2(\pi_{t+2}+\pi_{t+1}+\pi_t) + \ldots\Big] - (\alpha\beta)\pi_t - (\alpha\beta)^2(\pi_{t+1}+\pi_t) - (\alpha\beta)^3(\pi_{t+2}+\pi_{t+1}+\pi_t)$ que podemos simplificar ya que tiene toda una secuencia de términos que se cancelan en: $\pi_t + (\alpha\beta)(\pi_{t+1}) + (\alpha\beta)^2(\pi_{t+2}) + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty}(\alpha\beta)^k E_t(\pi_{t+k})$

Esta sumatoria se puede escribir como una ecuación diferencial. Para tal fin expandamos el primer término de cada una de las sumatorias del lazo izquierdo:

$$(1-\alpha\beta)\,\Theta\hat{mc_t}+(1-\alpha\beta)\,\Theta E_t\left[\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha\beta)^k\left[\hat{mc_{t+k}}\right]\right]+\pi_t+\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha\beta)^k E_t\left(\pi_{t+k}\right) \quad (3.50)$$

Esta expresión la podemos simplificar como:

$$(1-\alpha\beta)\,\Theta\hat{mc_t}+\pi_t+(\alpha\beta)\left[(1-\alpha\beta)\,\Theta E_t\left[\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha\beta)^k\left[\hat{mc_{t+k+1}}\right]\right]+\pi_t+\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha\beta)^k E_t\left(\pi_{t+1+k}\right)\right] \quad (3.51)$$

y por tanto podemos definir la ecuación (3.49) de una forma recursiva:

$$\hat{p}_t^*-\hat{p}_{t-1}=\alpha\beta E_t\left[\hat{p}_{t+1}^*-\hat{p}_t\right]+(1-\alpha\beta)\,\Theta\hat{mc}_t+\pi_t \quad (3.52)$$

Si utilizamos la definición de la inflación utilizada en la ecuación (3.32) podemos simplificar la expresión anterior como:

$$\pi_t=\beta E_t\left[\pi_{t+1}\right]+\lambda\hat{mc}_t \quad (3.53)$$

donde

$$\lambda=\frac{\Theta\,(1-\alpha)\,(1-\alpha\beta)}{\alpha}$$

La ecuación (3.53) se puede solucionar iterando hacia adelante y podemos encontrar una expresión donde la inflación es la suma descontada de los costos marginales esperados:

$$\pi_t=\lambda\sum_{k=0}^{\infty}\beta^k E_t\left[\hat{mc_{t+k}}\right]$$

si definimos el margen promedio de la economía como $\mu_t=-mc_t$ puede verse que la inflación en esta economía aumenta cuando el costo marginal esperado es alto, o las firmas esperan que el margen esté por debajo del estado estacionario. Cuando este es el caso, las firmas usan la oportunidad de re-optimizar sus precios para fijar un precio que es mayor al precio promedio de la economía.

A continuación podemos encontrar una relación entre el costo marginal de las firmas y los agregados de la economía. Utilizando la definición de costo marginal (3.41) y la relación trabajo-ocio de los hogares (3.11) tenemos:

$$mc_t = \varepsilon n_t + \sigma y_t - log\,(1-\eta) - y_t + n_t \tag{3.54}$$

Ahora usando la definición de la función de producción (3.17) podemos expresar el costo marginal como función del producto y de la productividad de la economía:

$$\begin{aligned} mc_t =& \frac{\varepsilon}{1-\eta} y_t - \frac{\varepsilon}{1-\eta} a_t + \sigma y_t - log\,(1-\eta) - y_t + \frac{1}{1-\eta} y_t - \frac{1}{1-\eta} a_t \\ =& y_t \left[\frac{\varepsilon}{1-\eta} + \sigma - 1 + \frac{1}{1-\eta} \right] - a_t \left[\frac{\varepsilon}{1-\eta} + \frac{1}{1-\eta} \right] - log\,(1-\eta) \\ =& y_t \left(\sigma + \frac{\varepsilon+\eta}{1-\eta} \right) - a_t \left(\frac{1+\varepsilon}{1-\eta} \right) - log\,(1-\eta) \end{aligned} \tag{3.55}$$

En ausencia de rigideces de precios el costo marginal esta definido como $mc = -\mu$ y por tanto la expresión anterior determina el nivel de producción de la economía libre de fricciones en la fijación de precios:

$$mc = y_t^n \left(\sigma + \frac{\varepsilon+\eta}{1-\eta} \right) - a_t \left(\frac{1+\varepsilon}{1-\eta} \right) - log\,(1-\eta) \tag{3.56}$$

$$y_t^n = \psi_{ya} a_t + \psi \tag{3.57}$$

donde $\psi_{ya} = \frac{1+\varepsilon}{\sigma(1-\eta)+\varepsilon+\eta}$ y $\psi = \frac{(log(1-\eta)-\mu)(1-\eta)}{\sigma(1-\eta)+\varepsilon+\eta}$. Si restamos la ecuación (3.55) de (3.56):

$$\hat{mc}_t = \left(\sigma + \frac{\varepsilon+\eta}{1-\eta} \right) (y_t - y_t^n) \tag{3.58}$$

La diferencia entre el producto observado en la economía y el producto libre de fricciones de precios es llamado la «brecha de producto» (*output gap*): $\widetilde{y}_t = y_t - y_t^n$. Con esta definición podemos escribir la ecuación de la dinámica de inflación como:

$$\pi_t = \beta E_t\,[\pi_{t+1}] + \kappa \tilde{y}_t \tag{3.59}$$

donde $\kappa = \lambda \left(\sigma + \frac{\varepsilon+\eta}{1-\eta}\right)$. Esta ecuación es conocida como la curva de Phillips Neokeynesiana ya que relaciona la inflación con el crecimiento de la economía incorporando las expectativas de inflación[6].

3.2.8. Ecuación IS dinámica

La ecuación de Euler (3.34) puede re-escribirse en función de la brecha del producto y es conocida como la ecuación IS dinámica (IS en referencia al modelo original de Hicks (1937) de *Investment-Savings*) de la siguiente manera:

$$\tilde{y}_t = E_t\left(\tilde{y_{t+1}}\right) - \frac{1}{\sigma}\left(i_t - E_t\left[\pi_{t+1}\right] - r_t^n\right) \tag{3.60}$$

donde $r_t^n = \rho + \sigma E_t\left[y_{t+1}^n - y_t^n\right]$ es la tasa de interés natural de la economía y usando (3.57) puede escribirse como :

$$r_t^n = \rho + \sigma \psi_{ya} E_t\left[a_{t+1} - a_t\right] \tag{3.61}$$

bajo el supuesto de que las fricciones de precios se desvanecen en el largo plazo, $lim_{T\to\infty} E_t\left[\tilde{y_{t+T}}\right] = 0$, la ecuación IS se puede solucionar iterando hacia adelante de la siguiente forma:

$$\tilde{y}_t = -\frac{1}{\sigma}\sum_{k=0}^{\infty}\left(r_{t+k} - r_{t+k}^n\right) \tag{3.62}$$

donde $r_t = i_t - E_t\left[\pi_{t+1}\right]$. Esta ecuación indica que la brecha del producto es la suma descontada de desviaciones futuras de la tasa de interés real de la tasa de interés natural de la economía. La ecuación de Phillips Neokeynesiana y la ecuación IS dinámica constituyen el bloque del modelo que abstrae de política monetaria y determinan la dinámica de la brecha del producto y de la inflación dado choques reales a la economía y una senda

[6]La curva de Phillips fue inicialmente propuesta por Phillips (1958) como una relación negativa, y no lineal, entre el desempleo y los cambios en salarios. Samuelson and Solow (1960) son los primeros en formalizar la curva de Phillips y la expresan por primera vez como una relación entre inflación y desempleo. En sus versiones iniciales la curva de Phillips establecía una relación entre la inflación y el desempleo que dependía de la dinámica contemporánea de cada variable. Phelps (1967) y Friedman (1968) proponen una versión de la curva de Phillips donde las expectativas de inflación juegan un papel importante. El modelo Neokeynesiano de Galı and Gertler (1999) propone una curva de Phillips con expectativas racionales que no está sujeto a la crítica de Lucas (1972) de las especificaciones iniciales de la curva de Phillips.

de tasas de interés nominal. Para solucionar el modelo es necesario determinar como las tasas de interés nominal son fijadas en la economía. Para dicho fin es necesario modelar como la autoridad monetaria de la economía fija tasas de interés nominales. La siguiente sección completa el modelo mediante una regla de tasas de interés que pretende capturar el comportamiento de la autoridad monetaria.

3.2.9. Regla de tasas de interés

Asumamos que la autoridad monetaria fija tasas de interés nominales de acuerdo a la siguiente regla:

$$i_t = \rho + \phi_\pi \pi_t + \phi_y \hat{y}_t + v_t \tag{3.63}$$

donde ϕ_π y ϕ_y son los coeficientes que determinan la respuesta de la autoridad frente a cambios en la inflación y la brecha del producto, respectivamente, y v_t es un choque exógeno a las tasas de interés.

3.2.10. Resumen del modelo

El apéndice de este capítulo (3.3.1) muestra como las tres ecuaciones que definen el modelo se pueden combinar de tal forma que el modelo tenga una representación de estado:

$$\begin{bmatrix} \tilde{y}_t \\ \pi_t \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} E_t\left(\tilde{y_{t+1}}\right) \\ E_t\left(\pi_{t+1}\right) \end{bmatrix} + B\left(r_t^n - \rho - v_t\right) \tag{3.64}$$

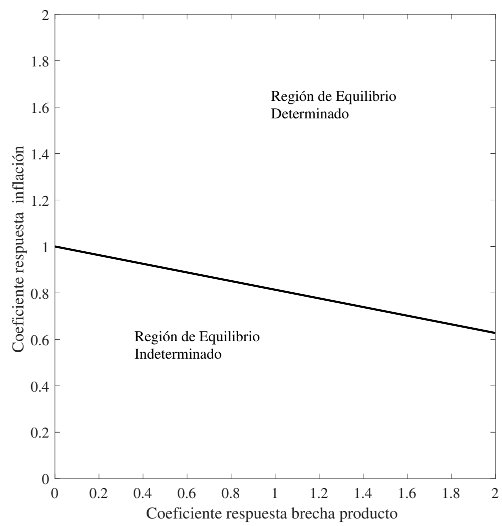
donde $A = \Omega \begin{bmatrix} \sigma & 1-\beta\phi_\pi \\ \sigma\kappa & \kappa+\beta\left(\sigma+\phi_y\right) \end{bmatrix}$ y $B = \Omega \begin{bmatrix} 1 \\ \kappa \end{bmatrix}$ con $\Omega = \frac{1}{\sigma+\phi_y+\kappa\phi_\pi}$. Dado que la brecha del producto y la inflación son variables no predeterminadas, es necesario que ambos eigenvalores de la matriz A estén en el circulo unitario[7]. Para que sea este el caso, necesitamos que los parámetros del modelo cumplan con la siguiente condición:

$$\kappa\left(\phi_\pi - 1\right) + \left(1-\beta\right)\phi_y > 0 \tag{3.65}$$

[7] Blanchard and Kahn (1980)

Esta condición implica que la autoridad monetaria encargada del control de la tasa de interés nominal debe reaccionar con suficiente severidad frente a un aumento de la tasa de inflación para que la dinámica del sistema esté determinada. Usando los parámetros presentados en la tabla (3.1) de calibración podemos encontrar la relación entre los dos coeficientes de la regla de tasas de interés que generan un equilibrio determinado en el modelo. La gráfica (3.1) presenta la región de equilibrio determinado e indeterminado dependiendo de combinaciones de los coeficientes de la regla de tasa de interés.

Figura 3.1: Determinación del modelo de acuerdo a los coeficientes de la regla de tasa de interés



Nota: Con base en los parámetros presentados en la tabla (3.1)

3.2.11. Efectos de un choque monetario

Antes de presentar las predicciones cuantitativas del modelo podemos hacer uso de la simple estructura del modelo para analizar el efecto de un choque de política monetaria usando la técnica de coeficientes indeterminados. Supongamos que el choque de tasas de interés toma la siguiente forma auto-regresiva:

$$v_t = \rho_v v_{t-1} + \varepsilon_{v,t}$$

donde ρ_v pertenece al intervalo $[0,1)$ y $\varepsilon_{v,t}$ es la innovación a los choques de tasas de interés y se distribuye normal con esperanza cero y varianza unitaria. Un choque positivo (innovación $\varepsilon_{v,t}$ positiva) es un choque recesivo que lleva a un aumento de las tasas de interés. Dada la estructura del modelo podemos suponer que la solución toma una forma lineal:

$$\pi_t = a \cdot v_t \tag{3.66}$$

$$\tilde{y}_t = b \cdot v_t \tag{3.67}$$

donde a y b son coeficientes a ser determinados usando las ecuaciones del modelo. Haciendo uso de la conjetura de las ecuaciones (3.66) y ()3.67, la curva de Phillips y la ecuación de Euler del modelo se pueden escribir como:

$$\pi_t = \beta E_t [a v_{t+1}] + k b v_t$$

$$\tilde{y}_t = E_t [b v_{t+1}] - \frac{1}{\sigma} [\rho + \phi_\pi \pi_t + \phi_y \widetilde{y_t} + v_t - E_t [a v_{t+1}] - \rho]$$

donde la tasa de interés natural es igual a la tasa de descuento de los hogares ya que asumimos que la productividad agregada de la economía se mantiene constante. Las dos ecuaciones anteriores quedan:

$$\pi_t = (\beta a \rho_v + k b) v_t$$

$$\tilde{y}_t = \left[b\rho_v - \frac{1}{\sigma} (\phi_\pi a + \phi_y b - a\rho_v + 1) \right] v_t$$

con las cuales podemos encontrar los dos coeficientes solucionado las dos ecuaciones:

$$a = \beta a \rho_v + k b$$

$$b = b\rho_v - \frac{1}{\sigma} (\phi_\pi a + \phi_y b - a\rho_v + 1)$$

Este sistema arroja la siguiente solución:

$$a = \frac{-k}{(1-\beta\rho_v)(\sigma(1-\rho_v)+\phi_y)+\kappa(\phi_\pi-\rho_v)}$$

$$b = \frac{-(1-\beta\rho_v)}{(1-\beta\rho_v)(\sigma(1-\rho_v)+\phi_y)+\kappa(\phi_\pi-\rho_v)}$$

donde los dos coeficientes son negativos lo que muestra que un aumento exógeno de las tasas de interés llevan a una reducción de la inflación y de la brecha del producto (efecto contractivo). Dado que las tasas de interés natural y el nivel del producto potencial de la economía se mantienen constantes, debido a que la productividad agregada no cambia, la caída en la brecha del producto se explica en su totalidad por una caída en el producto. En la siguiente sección exploramos el efecto cuantitativo de un choque monetario contractivo, así como la respuesta de esta economía frente a un choque de productividad agregada,

3.3. Predicciones Cuantitativas del modelo Neokeynesiano

A continuación presentamos las predicciones del modelo Neokeynesiano calibrado a una frecuencia trimestral y sujeto a dos diferentes choques: un choque monetario a las tasas de interés y un choque de la productividad agregada.

3.3.1. Calibración

El cuadro (3.1) presenta la calibración básica del modelo Neokeynesiano siguiendo la parametrización sugerida por Galí (2015). El factor de descuento es calibrado para tener una tasa de interés real de 4 %. Los parámetros que gobiernan las preferencias de los hogares son los típicamente usados en la literatura de ciclos reales, con preferencias logarítmicas del consumo y un elasticidad de la oferta laboral unitaria. Los retornos a escala de la función de producción son iguales a un tercio lo que implica que la fracción de ingreso de los trabajadores es dos-tercios. La semi-elasticidad de la demanda de dinero es resultado de una estimación por mínimo cuadrados del logaritmo de la velocidad de dinero usando un agregado monetario (M2) con respecto a la tasa de interés nominal de corto plazo en los Estados Unidos (el *Treasury Bill* de 3 meses). El parámetro de re-optimización de precios (parámetro de Calvo) es fijado igual a un valor de 2/3 que implica una duración promedio esperada de un precio equivalente a tres trimestres. Los valores de la función de reacción son resultado de estimaciones de cambios en las tasas de interés nominal de referencia de la Reserva Federal de los Estados Unidos frente a cambios en la inflación y estimaciones de la brecha del producto durante el periodo donde Alan Greenspan estuvo en cabeza del comité de política monetaria de dicha entidad.

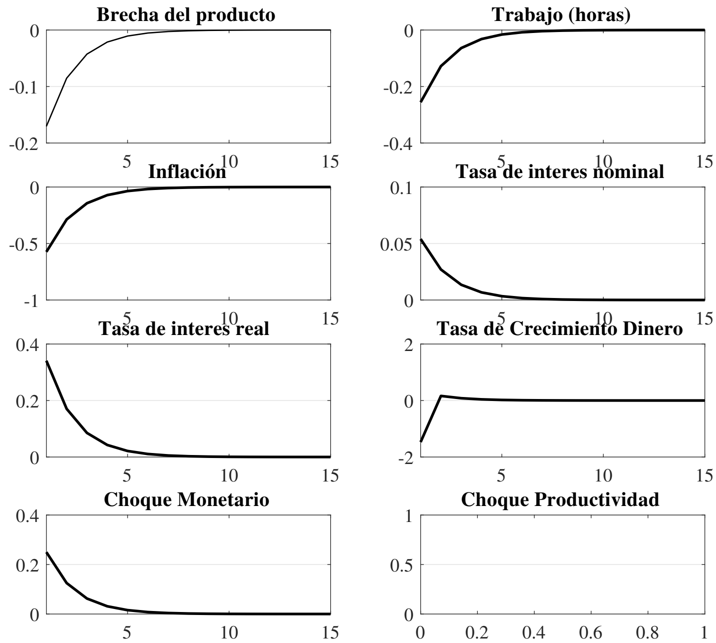
Cuadro 3.1: Modelo Neokeynesiano Calibración

Parámetro	Símbolo	Valor	Objetivo/ Fuente
Factor Descuento	β	0.99	Tasa de interés real 4 % anual
Elasticidad Intertemporal	σ	1	Utilidad logarítmica
Elasticidad Variedades	θ	6	Margen Firmas
Retornos a Escala Producción	η	1/3	Fracción Ingreso Trabajo
Parámetro re-optimización precios	α	$2/3$	Duración promedio precio de un trimestre
Elasticidad de Frisch de trabajo	ε	1	Modelo Ciclos Reales
Semi-elasticidad demanda de dinero	ζ	4	Relación M2 y tasa de interés de 3 meses
Coeficiente Regla Monetaria Producto	ϕ_π	1.5	Estimación de la Reserva Federal
Coeficiente Regla Monetaria Inflación	ϕ_y	0.125	Estimación de la Reserva Federal
Autocorrelación productividad	ρ_a	0.9	Residuo de Solow mensual
Autocorrelación choque monetario	ρ_v	0.5	Persistencia choque monetario

Las figuras (3.2) y (3.3) muestran las funciones de impulso-respuesta del modelo frente a un choque monetario equivalente a un aumento de 25 puntos básicos de las tasa de referencia y un aumento de una unidad de la productividad agregada, respectivamente.

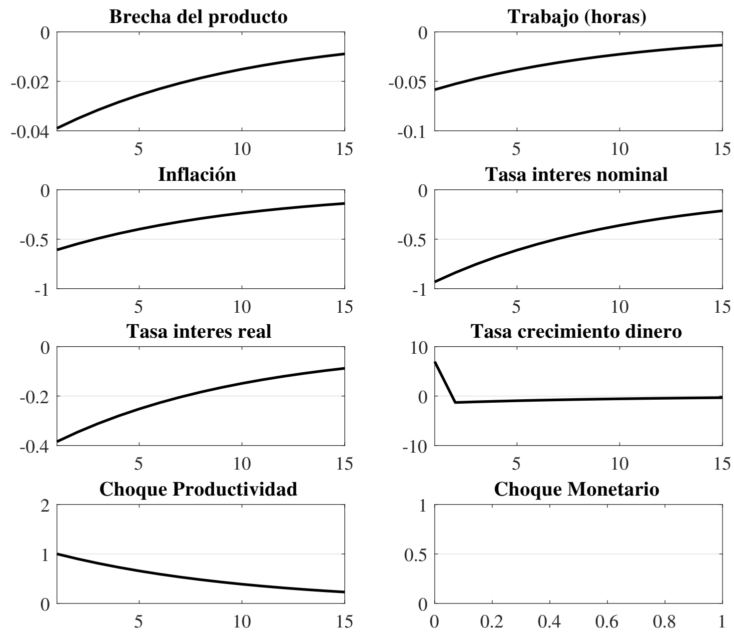
El choque monetario aumenta las tasas de interés real, lo cual lleva a una caída en el producto, en las horas de trabajo y en la inflación. Dado que la tasa de interés natural no cambia con el choque monetario, el producto potencial no cambia y la economía experimenta una brecha negativa del producto. La autoridad monetaria reduce las tasas de interés mediante una caída en la cantidad de dinero de la economía. El aumento en la tasa de interés nominal es menor que el de la tasa de interés real debido a la reducción de la inflación.

Figura 3.2: Impulso Respuesta Modelo Neokeynesiano choque Monetario



Nota: Solución log-lineal de primer orden (Dynare). Variables en desviaciones absolutas del estado estacionario.

Figura 3.3: Impulso Respuesta Modelo Neokeynesiano Choque Productividad



Nota: Solución log-lineal de primer orden (Dynare). Variables en desviaciones absolutas del estado estacionario.

Ejercicios

Ejercicio 8. Economía clásica con preferencias y tecnología lineal

Suponga la siguiente economía clásica con precios flexibles y dinero.

Hogares

Los hogares maximizan su utilidad intertemporal que depende del consumo y la desutilidad de trabajo:

$$max_{\{c_t,N_t,B_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[C_t - \frac{N_t^{1+\varepsilon}}{1+\varepsilon} \right]$$

sujeto a la restricción presupuestal:

$$P_tC_t + Q_tB_{t+1} = B_t + W_tN_t$$

El precio del consumo del bien final es P_t y B_t representa los bonos nominales no contingentes de un período que los hogares puede acumular (o des-acumular) y que pagan 1 unidad del bien final cuando maduran y tiene un costo de Q_t.Use la notación de la clase donde $\pi_{t+1} = log(P_{t+1}) - log(P_t)$, es la tasa de inflación, $\rho = -log(\beta)$ es la tasa de descuento de los hogares (la tasa de interés real de estado estacionario), y $i_t = -log(Q_t)$

Firmas

La firma representativa maximiza beneficios usando una función de producción sujeta a choques de productividad:

$$max_{\{N_t\}_{t=0}^{\infty}} [P_tY_t - W_tN_t] = P_tZ_tN_t - W_tN_t$$

Tasas de interés

$$i_t = \rho + \phi_\pi \pi_t$$

con $\phi_\pi > 1$

1. Derive las condiciones de optimalidad del hogar y la firma. Encuentre una aproximación log-lineal de primer orden a las condiciones de optimalidad.

   a) ¿ Cómo depende el producto y las horas de trabajo de los choques de productividad $z_t = log(Z_t)$?

   b) ¿ Son las variables reales independientes de las nominales?

   c) ¿ Cuál es el nivel de equilibrio de la inflación (π_t) y de la tasas de interés nominal (i_t)? ¿ Como difiere este modelo de la economía clásica viste en clase donde las preferencias de consumo y la función de producción no son lineales?

Ejercicio 9. Modelo Neokeynesiano con choques de inflación

Suponga el siguiente modelo Neokeynesiano similar al analizado en clase y caracterizado por las siguientes tres ecuaciones:

$$\pi_t = \beta E_t\left[\pi_{t+1}\right] + \kappa \tilde{y}_t + \mu_t \tag{3.68}$$

$$\widetilde{y}_t = E_t\left(\widetilde{y_{t+1}}\right) - \frac{1}{\sigma}\left(i_t - E_t\left[\pi_{t+1}\right] - \rho\right) \tag{3.69}$$

$$i_t = \rho + \phi_\pi \pi_t$$

donde $\widetilde{y}_t$ es la brecha del producto (con respecto al nivel eficiente de producción), π_t es la tasa de inflación, i_t es la tasa de interés nominal, ρ es la tasa de descuento de los hogares, y μ_t es un choque que sigue un proceso de ruido blanco, esperanza igual a cero y varianza igual a uno: $\mu_t \sim N(0,1)$.

a) Describa brevemente de dónde vienen las ecuaciones (3.68) y (3.69). ¿Qué interpretación se le puede dar al origen del choque μ_t?

b) Determine la dinámica de π_t y $\widetilde{y}_t$ en equilibrio (ayuda: asuma que $\pi_t = a \cdot \mu_t$, $\widetilde{y}_t = b \cdot \mu_t$ y encuentre a y b usando el método de coeficientes indeterminados).

Ejercicio 10. Modelo Neokeynesiano con choques de productividad

Suponga el siguiente modelo Neokeynesiano similar al analizado en clase y caracterizado por las siguientes ecuaciones:

$$\pi_t = \beta E_t\left[\pi_{t+1}\right] + \kappa \tilde{y}_t \tag{3.70}$$

$$\widetilde{y}_t = E_t\left(\widetilde{y_{t+1}}\right) - \frac{1}{\sigma}\left(i_t - E_t\left[\pi_{t+1}\right] - r_t^n\right) \tag{3.71}$$

$$i_t = \rho + \phi_\pi \pi_t + \phi_y \widetilde{y}_t$$

$$r_t^n = \rho + \sigma\psi_{ya}E_t\left[y_{t+1}^n - y_t^n\right] \tag{3.72}$$

$$y_t^n = \psi_{ya}a_t + \psi$$

donde $\widetilde{y}_t$ es la brecha del producto (con respecto al nivel eficiente de producción y_t^n), π_t es la tasa de inflación, i_t es la tasa de interés nominal, ρ es la tasa de descuento de los hogares, r_t^n es la tasa de interés natural, $\psi_{ya} = 1$ suponiendo que las firmas tienen retornos constantes a escala ($\eta = 1$), y a_t es un choque de productividad que sigue un proceso auto-regresivo:

$$a_t = \rho_a a_{t-1} + \varepsilon_{a,t}$$

donde $\varepsilon_{a,t} \sim N(0,1)$

a) Encuentre la tasa de interés natural (r_t^n) como función de los choques de productividad (a_t) usando las ecuaciones anteriores.

b) Determine la dinámica de π_t y $\widetilde{y}_t$ en equilibrio (ayuda: asuma que $\pi_t = a \cdot \hat{r_t^n}$, $\widetilde{y}_t = b \cdot \hat{r_t^n}$ y donde $\hat{r_t^n} = r_t^n - \rho$. Encuentre a y b usando el método de coeficientes indeterminados. Use el hecho de que $E_t\left(\hat{r_{t+1}^n}\right) = \rho_a \hat{r_t^n}$). ¿Cómo afecta un choque positivo de productividad la inflación y la brecha del producto de esta economía?

Ejercicio 11. Simulación Modelo Neokeynesiano

Con base en el código de Dynare que replica el modelo Neokeynesiano disponible en la página de la clase, adicione un choque de inflación (*cost-push shock*) como el analizado en el ejercicio (9):

$$\pi_t = \beta E_t\left[\pi_{t+1}\right] + \kappa\tilde{y}_t + \mu_t$$

pero ahora asuma que este choque es auto-regresivo:

$$\mu_t = \rho_\mu \mu_{t-1} + \varepsilon_{\mu,t}$$

Utilizando los parámetros del modelo grafique los impulsos-respuestas de las variables endógenas frente a choques de productividad (a_t), monetarios (v_t), y de inflación (μ_t). Compare los tres choques. ¿ En alguno de los choques la economía enfrenta un *trade-off* entre inflación y la brecha del producto, o los choques mueven estas variables en la misma dirección? Analice a la luz de como la autoridad monetaria debería responder a dicho *trade-off*.

Apéndice

Dispersión precios estado estacionario

Sea $X_t = \int \left(\frac{p_t(z)}{P_t}\right)^{\chi} dz$ donde $\chi = \frac{-\theta}{1-\eta}$ en la expresión (3.36). Es fácil verificar que en el estado estacionario sin inflación $X_t = X = 1$, dado que $p(z) = P$. Ahora escribamos X_t como desviaciones del estado estacionario: $e^{x_t} = \int e^{\chi(\hat{p}_t(z)-\hat{p}_t)} dz$, que implica : $x_t = \lambda \int (\hat{p}_t(z) - \hat{p}_t)\, dz$. Usando la expresión para el índice agregado de precios (3.30) se puede demostrar que $\hat{p}_t(z) = \hat{p}_t$, por lo que $x_t = 0$.

Representación modelo Neokeynesiano

En este apéndice se deriva la representación del modelo Neokeynesiano como un sistema de ecuaciones diferenciales. Las tres ecuaciones que definen el modelo son:

$$\pi_t = \beta E_t[\pi_{t+1}] + \kappa \tilde{y}_t \tag{3.73}$$

$$\widetilde{y}_t = E_t\left(\widetilde{y_{t+1}}\right) - \frac{1}{\sigma}\left(i_t - E_t[\pi_{t+1}] - r_t^n\right) \tag{3.74}$$

$$i_t = \rho + \phi_\pi \pi_t + \phi_y \widetilde{y}_t + v_t \tag{3.75}$$

Empecemos con la ecuación IS dinámica usando la definición de la tasa de interés de acuerdo a la regla monetaria:

$$\widetilde{y}_t = E_t\left(\widetilde{y_{t+1}}\right) - \frac{1}{\sigma}\left(\rho + \phi_\pi \pi_t + \phi_y \widetilde{y}_t + v_t - E_t[\pi_{t+1}] - r_t^n\right) \tag{3.76}$$

usemos la ecuación de la curva de Phillips para remplazar la inflación del periodo actual:

$$\widetilde{y_t} = E_t\left(\widetilde{y_{t+1}}\right) - \frac{1}{\sigma}\left(\rho + \phi_\pi\left(\beta E_t\left[\pi_{t+1}\right] + \kappa \tilde{y}_t\right) + \phi_y \widetilde{y_t} + v_t - E_t\left[\pi_{t+1}\right] - r_t^n\right) \tag{3.77}$$

$$\widetilde{y_t} = E_t\left(\widetilde{y_{t+1}}\right) + \frac{1-\beta\phi_\pi}{\sigma} E_t\left[\pi_{t+1}\right] - \left(\frac{\phi_\pi \kappa + \phi_y}{\sigma}\right)\tilde{y}_t + \left(\frac{r_t^n - \rho - v_t}{\sigma}\right) \tag{3.78}$$

despejando $\widetilde{y_t}$:

$$\widetilde{y_t} = \frac{1}{\sigma + \phi_y + \kappa\phi_\pi}\left[\sigma E_t\left(\widetilde{y_{t+1}}\right) + \left(1 - \beta\phi_\pi\right) E_t\left[\pi_{t+1}\right] + \left(r_t^n - \rho - v_t\right)\right] \tag{3.79}$$

Ahora remplacemos el valor de la brecha del producto (3.79) en ecuación de la curva de Phillips (3.73):

$$\pi_t = \beta E_t\left[\pi_{t+1}\right] + \kappa\left[\frac{1}{\sigma + \phi_y + \kappa\phi_\pi}\left[\sigma E_t\left(\widetilde{y_{t+1}}\right) + \left(1 - \beta\phi_\pi\right) E_t\left[\pi_{t+1}\right] + \left(r_t^n - \rho - v_t\right)\right]\right] \tag{3.80}$$

agrupando términos:

$$\pi_t = \frac{\sigma\kappa E_t\left(\widetilde{y_{t+1}}\right)}{\sigma + \phi_y + \kappa\phi_\pi} + \frac{\kappa + \beta\left(\sigma + \phi_y\right) E_t\left[\pi_{t+1}\right]}{\sigma + \phi_y + \kappa\phi_\pi} + \frac{\kappa\sigma}{\sigma + \phi_y + \kappa\phi_\pi}\left(r_t^n - \rho - v_t\right)$$

$$\pi_t = \frac{1}{\sigma + \phi_y + \kappa\phi_\pi}\left[\sigma\kappa E_t\left(\widetilde{y_{t+1}}\right) + \left(\kappa + \beta\left(\sigma + \phi_y\right)\right) E_t\left[\pi_{t+1}\right] + \kappa\left(r_t^n - \rho - v_t\right)\right]$$

de aquí obtenemos la representación del modelo:

$$\begin{bmatrix} \widetilde{y_t} \\ \pi_t \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} E_t\left(\widetilde{y_{t+1}}\right) \\ E_t\left(\pi_{t+1}\right) \end{bmatrix} + B\left(r_t^n - \rho - v_t\right) \tag{3.81}$$

donde $A = \Omega \begin{bmatrix} \sigma & 1 - \beta\phi_\pi \\ \sigma\kappa & \kappa + \beta\left(\sigma + \phi_y\right) \end{bmatrix}$ y $B = \Omega \begin{bmatrix} 1 \\ \kappa \end{bmatrix}$ con $\Omega = \frac{1}{\sigma + \phi_y + \kappa\phi_\pi}$.

Índice alfabético

T

Bibliografía

Abel, A. B., B. S. Bernanke, and D. Croushore (2014). *Macroeconomics (8th edn)*. Pearson.

Aiyagari, S. R. (1994). Uninsured idiosyncratic risk and aggregate saving. *The Quarterly Journal of Economics 109*(3), 659–684.

Azariadis, C. (1981). Self-fulfilling prophecies. *Journal of Economic theory 25*(3), 380–396.

Benhabib, J. and R. E. Farmer (1994). Indeterminacy and increasing returns. *Journal of Economic Theory 63*(1), 19–41.

Bernanke, B. (1995). The macroeconomics of the great depression: A comparative approach. *Journal of Money, Credit, and Banking 27*(1), 1–28.

Bernanke, B. S., M. Gertler, and S. Gilchrist (1999). The financial accelerator in a quantitative business cycle framework. *Handbook of macroeconomics 1*, 1341–1393.

Bianchi, F. (2012). Regime switches, agents' beliefs, and post-world war ii us macroeconomic dynamics. *The Review of Economic Studies*, rds032.

Blanchard, O. J. and C. M. Kahn (1980). The solution of linear difference models under rational expectations. *Econometrica*, 1305–1311.

Brinca, P., V. V. Chari, P. J. Kehoe, and E. McGrattan (2016). Accounting for business cycles. *Handbook of Macroeconomics*.

Brock, W. A. and L. J. Mirman (1972). Optimal economic growth and uncertainty: the discounted case. *Journal of Economic Theory 4*(3), 479–513.

Calvo, G. A. (1983). Staggered prices in a utility-maximizing framework. *Journal of monetary Economics 12*(3), 383–398.

Campbell, J. Y. (1994). Inspecting the mechanism: An analytical approach to the stochastic growth model. *Journal of Monetary Economics 33*(3), 463–506.

Campbell, J. Y. and J. H. Cochrane (1995). By force of habit: A consumption-based explanation of aggregate stock market behavior. Technical report, National Bureau of Economic Research.

Cass, D. and K. Shell (1983). Do sunspots matter? *Journal of political economy 91*(2), 193–227.

Chari, V. V., P. J. Kehoe, and E. R. McGrattan (2007). Business cycle accounting. *Econometrica 75*(3), 781–836.

Chetty, R., A. Guren, D. Manoli, and A. Weber (2011). Are micro and macro labor supply elasticities consistent? a review of evidence on the intensive and extensive margins. *The American Economic Review 101*(3), 471–475.

Christiano, L. J., M. Eichenbaum, and C. L. Evans (1996). Identification and the effects of monetary policy shocks. *Financial Factors in Economic Stabilization and Growth*, 36–74.

Clarida, R., J. Galí, and M. Gertler (1999). The science of monetary policy: A new keynesian perspective. *Journal of Economic Literature 37*, 1661–1707.

Cole, H. L. and L. E. Ohanian (2004). New deal policies and the persistence of the great depression: A general equilibrium analysis. *Journal of Political Economy 112*(4), 779–816.

Cooley, T. F. and E. C. Prescott (1995). Economic growth and business cycles. *Frontiers of Business Cycle Research 1*.

Diamond, P. A. (1982). Wage determination and efficiency in search equilibrium. *The Review of Economic Studies 49*(2), 217–227.

Epstein, L. G. and M. Schneider (2007). Learning under ambiguity. *The Review of Economic Studies 74*(4), 1275–1303.

Farmer, R. E. (1999). *The macroeconomics of self-fulfilling prophecies*. mit Press.

Farmer, R. E. and J.-T. Guo (1994). Real business cycles and the animal spirits hypothesis. *Journal of Economic Theory 63*(1), 42–72.

Friedman, M. (1968). The role of monetary policy. *The American Economic Review 58*(1).

Friedman, M. et al. (1957). A theory of the consumption function. *NBER Books*.

Friedman, M. and A. J. Schwartz (1963). *A monetary history of the United States, 1867-1960*. Princeton University Press.

Gabaix, X. (2008). Variable rare disasters: A tractable theory of ten puzzles in macro-finance. *The American Economic Review 98*(2), 64–67.

Galí, J. (2015). *Monetary policy, inflation, and the business cycle: an introduction to the new Keynesian framework and its applications*. Princeton University Press.

Galı, J. and M. Gertler (1999). Inflation dynamics: A structural econometric analysis. *Journal of monetary Economics 44*(2), 195–222.

Goodfriend, M. and R. G. King (1997). The new neoclassical synthesis and the role of monetary policy. *NBER macroeconomics annual 12*, 231–283.

Hagedorn, M. and I. Manovskii (2008). The cyclical behavior of equilibrium unemployment and vacancies revisited. *The American Economic Review 98*(4), 1692–1706.

Hall, R. E. (2005). Employment fluctuations with equilibrium wage stickiness. *The American Economic Review 95*(1), 50–65.

Hall, R. E. and P. R. Milgrom (2008). The limited influence of unemployment on the wage bargain. *The American Economic Review 98*(4), 1653–1674.

Hansen, G. D. (1985). Indivisible labor and the business cycle. *Journal of monetary Economics 16*(3), 309–327.

Hicks, J. R. (1937). Mr. keynes and theçlassics"; a suggested interpretation. *Econometrica*, 147–159.

Hosios, A. J. (1990). On the efficiency of matching and related models of search and unemployment. *The Review of Economic Studies 57*(2), 279–298.

Ilut, C. L. and M. Schneider (2014). Ambiguous business cycles. *The American Economic Review 104*(8), 2368–2399.

Jermann, U. and V. Quadrini (2012). Macroeconomic effects of financial shocks. *The American Economic Review 102*(1), 238–271.

Keynes, J. M. (1936). The general theory of money, interest and employment. *Reprinted in The Collected Writings of John Maynard Keynes 7*.

King, R. G., C. I. Plosser, and S. T. Rebelo (1988). Production, growth and business cycles: I. the basic neoclassical model. *Journal of monetary Economics 21*(2), 195–232.

King, R. G. and S. T. Rebelo (1999). Resuscitating real business cycles. *Handbook of Macroeconomics 1*, 927–1007.

Kiyotaki, N. and J. Moore (1997). Credit cycles. *Journal of political economy 105*(2), 211–248.

Klein, P. (2000). Using the generalized schur form to solve a multivariate linear rational expectations model. *Journal of Economic Dynamics and Control 24*(10), 1405–1423.

Knight, F. H. (1921). Risk, uncertainty and profit. *University of Illinois at Urbana-Champaign's Academy for Entrepreneurial Leadership Historical Research Reference in Entrepreneurship*.

Krusell, P. and A. A. Smith, Jr (1998). Income and wealth heterogeneity in the macroeconomy. *Journal of political Economy 106*(5), 867–896.

Kydland, F. E. and E. C. Prescott (1982). Time to build and aggregate fluctuations. *Econometrica*, 1345–1370.

Lieberman, M. and R. E. Hall (2008). *Principles and Applications of Macroeconomics*. Thomson.

Ljungqvist, L. and T. J. Sargent (2004). *Recursive Macroeconomic Theory*. MIT press.

Lucas, R. E. (1972). Expectations and the neutrality of money. *Journal of Economic Theory 4*(2), 103–124.

Lucas, R. E. (1976). Econometric policy evaluation: A critique. In *Carnegie-Rochester conference series on public policy*, Volume 1, pp. 19–46. Elsevier.

Lucas, R. E. (1987). *Models of business cycles*, Volume 26. Basil Blackwell Oxford.

Mankiw, G. (2014). *Macroeconomics*. Worth Publishers.

Mark Gertler, A. T. (2009). Unemployment fluctuations with staggered nash wage bargaining. *Journal of Political Economy 117*(1), 38–86.

Mortensen, D. T. (1982). The matching process as a noncooperative bargaining game. In *The economics of information and uncertainty*, pp. 233–258. University of Chicago Press.

Mortensen, D. T. and C. A. Pissarides (1994). Job creation and job destruction in the theory of unemployment. *The review of economic studies 61*(3), 397–415.

Muth, J. F. (1961). Rational expectations and the theory of price movements. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 315–335.

Ohanian, L. E. (2009). What–or who–started the great depression? *Journal of Economic Theory 144*(6), 2310–2335.

Phelps, E. S. (1967). Phillips curves, expectations of inflation and optimal unemployment over time. *Economica*, 254–281.

Phillips, A. W. (1958). The relation between unemployment and the rate of change of money wage rates in the united kingdom, 1861–19571. *economica 25*(100), 283–299.

Pissarides, C. A. (1985). Short-run equilibrium dynamics of unemployment, vacancies, and real wages. *The American Economic Review 75*(4), 676–690.

Rogerson, R. (1988). Indivisible labor, lotteries and equilibrium. *Journal of monetary Economics 21*(1), 3–16.

Romer, D. (2002). *Advanced Macroeconomics*. McGraw-Hill.

Samuelson, P. A. and R. M. Solow (1960). Analytical aspects of anti-inflation policy. *The American Economic Review 50*(2), 177–194.

Shimer, R. (2005). The cyclical behavior of equilibrium unemployment and vacancies. *The American Economic Review 95*(1), 25–49.

Shimer, R. (2010). *Labor Markets and Business Cycles*. Princeton University Press.

Sims, C. A. (2002). Solving linear rational expectations models. *Computational economics 20*(1), 1–20.

Smets, F. and R. Wouters (2007). Shocks and frictions in us business cycles: A bayesian dsge approach. *The American Economic Review*, 586–606.

Stokey, N. L., R. E. Lucas, and E. C. Prescott (1989). *Recursive Methods in Economic Dynamics*. Harvard University Press.

Uhlig, H. (1995). A toolkit for analyzing nonlinear dynamic stochastic models easily.

Woodford, M. (2003). *Interest and prices: Foundations of a theory of monetary policy*. princeton university press.